УДК 512.64

Про розв'язки лінійних матричних рівнянь із заданим характеристичним многочленом

Прокіп В. М., к.ф.-м.н., с.н.с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3[б], м. Львів, 79060, Україна)

Нехай $M_n(F)$ – кільце $(n\times n)$-матриць над довільним полем F; I_n – одична $(n\times n)$-матриця: 0_n – нульова $(n\times n)$-матриця. Розглянемо матричне рівняння

$$XA_0 = A_1, \tag{1}$$

де $A_0, A_1 \in M_n(F)$ і X – невідома $(n\times n)$-матриця. Якщо A_0 – неособлива матриця, то рівняння (1) має єдиний розв'язок. Якщо ж $\operatorname{rank} A_0 < n$, то рівняння (1) розв'язне тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix}$.

Надалі розглядатимемо випадок, коли $\operatorname{rank} A_0 < n$ і рівняння (1) розв'язне. Наша мета – вказати умови, за яких для рівняння (1) існує розв'язок $X_0 \in M_n(F)$ із заданим характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - X_0) = a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots a_{n-1}\lambda + a_n \in F[x]$. Рівнянню (1) та многочлену $a(\lambda)$ поставимо у відповідність матричну в'язку $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ та матриці

$$N = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1A_0 + A_1 & a_2A_0 & a_3A_0 & \dots & a_nA_0 \end{bmatrix}}_{n} \text{ і } M = \left.\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & 0_n & \dots & \dots & 0_n \\ 0_n & A_0 & -A_1 & 0_n & \dots & 0_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_n & \dots & \dots & 0_n & A_0 & -A_1 \end{bmatrix}\right\} n-1.$$

Теорема 1. Нехай $X_0 \in M_n(F)$ – матриця із характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - X_0) = a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots a_{n-1}\lambda + a_n$ розв'язок рівняння (1). Тоді

$$\operatorname{rank} M = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}.$$

Очевидно, якщо рівняння (1) має не єдиний розв'язок, то $\operatorname{rank} A(\lambda) < n$. Надалі розглядатимемо рівняння (1), для яких $\operatorname{rank} A(\lambda) = n-1$. В цьому зв'язку позначимо через $d(\lambda)$ – н.с.д. мінорів $(n-1)$-го порядку матричної матричної в'язки $A(\lambda)$.

Теорема 2. Нехай $A(\lambda)$ – матрична в'язка рангу $\operatorname{rank} A(\lambda) = n-1$. Якщо $d(\lambda) = 1$, то рівняння (1) має розв'язок X_0 із характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - X_0) = a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots a_{n-1}\lambda + a_n \in F[\lambda]$ тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rank} M = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$$

Якщо ж шуканий розв'язок X_0 існує, то він єдиний із заданим характеристичним многочленом $a(\lambda)$.