УДК 539.3

Напружений стан нескінченного пружного тіла з осесиметричною порожниною за кручення

Кравець В. С., к.ф.-м.н., с.н.с.
Васюта Р. В., інж. ІІ к.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України
(вул. Наукова, 5, Львів, 79601, Україна)

Розглянемо задачу кручення нескінченного пружного тіла з осесиметричною порожниною. Введемо циліндричну систему координат (r,z,φ), сумістивши вісь z з віссю обертання. Замкнений контур осьового перерізу порожнини змоделюємо двома гладкими розімкненими кривими ($L = A\breve{C}B$ у правій півплощині rOz та її дзеркальним відображенням відносно осі z), які своїми кінцями (A,B) виходять на вісь обертання (рис.1). Вважатимемо, що поверхня порожнини вільна від навантажень, а простір закручується на сталий кут α_0=const. Для осесиметричної задачі кручення пружного тіла навантаження розподілені симетрично відносно осі z і спрямовані перпендикулярно до площини φ=const, а відмінні від нуля компоненти напружень $\tau_{\varphi r}, \tau_{\varphi z}$ та переміщення v у тангенціальному напрямі не залежать від кутової координати φ. Використовуючи метод суперпозиції, задачу зведено до визначення збуреного напруженого стану пружного тіла з тріщиною по поверхні обертання, на берегах якої $\boldsymbol{L}$ задані напруження

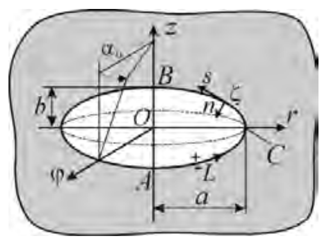

Рис. 1. Осесиметрична порожнина.

$$\tau_{\varphi n}(s) = \tau(s), \qquad (1)$$

а на нескінченності напруження і поворот відсутні. Тут n – зовнішня нормаль до контуру L, $s = s(\zeta)$ – дугова абсциса точки $\zeta = r + iz \in L$, $\tau(s) = \tau_0 (dr/ds)(r/a)$, $\tau_0 = Ga\alpha_0$, G – модуль зсуву.

Інтегральне подання загального розв’язку рівняння рівноваги у переміщеннях візьмемо у вигляді [1,2] $v(r,z) = v_0 + \dfrac{2}{G}\int\limits_L \gamma(s') r'^2 \dfrac{\partial}{\partial n'}\left(\dfrac{v^*}{r'}\right) ds'$, де $\gamma(s) = G[v^+(s) - v^-(s)]/2$ – стрибок переміщень на контурі L, $v^* = [2E(k) - (2-k^2)K(k)] \big/ (2\pi k\sqrt{rr'})$, $K(k)$ і $E(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду, $k = 2\sqrt{rr'} \big/ \sqrt{(z-z')^2 + (r+r')^2}$, $v_0 = \alpha_0 rz$ – переміщення у тілі без тріщини. Задовольнивши крайову умову (1), задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) [1,2]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L \Gamma(s') J(r,z,r',z') ds' = \tau(s), \qquad (2)$$

відносно невідомої функції $\Gamma(s) = \partial(\gamma(s)/r)/\partial s$. Ядро СІР $J(r,z,r',z')$ крім регулярних складових містить в собі логарифмічну особливість та сингулярність типу Коші (коли $\zeta \to \zeta'$). СІР (2) має єдиний розв’язок за умови однозначності переміщень на контурі L ($\int\limits_L \Gamma(s) ds = 0$).

Задавши форму контуру L параметричним рівнянням $\zeta = r + iz = \omega(\eta), \zeta' = r' + iz' = \omega(\xi)$, де $\eta, \xi \in (-1;+1)$, СІР (2) записано у безрозмірному вигляді та разом з додатковою умовою за відомими квадратурними формулами [1] зведено до розв'язування системи N лінійних алгебричних рівнянь для визначення вузлових значень функції $u(\xi_k), k=\overline{1,N}$, де $u(\xi)=\Gamma(s'(\xi))|\omega'(\xi)|\sqrt{1-\xi^2}$, $\xi_k=\cos((2k-1)\pi/(2N))$ – нулі поліномів Чебишова першого роду.

Збурені напруження в області тіла визначаємо за формулами [2]

$$\tau_{\varphi r}(r,z)=\frac{2}{r^2}\int_L \Gamma(s')r'^3\frac{\partial\Phi^*}{\partial z}ds' , \quad \tau_{\varphi z}(r,z)=-\frac{2}{r^2}\int_L \Gamma(s')r'^3\frac{\partial\Phi^*}{\partial r}ds' , \tag{3}$$

де $\Phi^*=r^2\left[8(2-k^2)E(k)-(4-k^2)(4-3k^2)K(k)\right]/\left(6\pi r'k^3\sqrt{rr'}\right)$. Знайдено граничні значення напружень (3) на L і відповідне повне тангенціальне напруження на поверхні порожнини

$$\tau_{\varphi s}(s)=-\Gamma(s)\cdot r+\tau^0_{\varphi s}(s)+\tau_{s0}(s) . \tag{4}$$

Тут $\tau_{s0}(s)=(dz/ds)(\tau_0 r/a)$ – напруження у точці $\zeta\in L$ суцільного пружного тіла, що відповідає заданому куту його закручування α_0 , $\tau^0_{\varphi s}(s)$ – прямі значення збурених напружень $\tau_{\varphi s}(\zeta)$, обчислених на основі виразів (3).

Розраховані відносні напруження (4) $\tau_*(\eta)=\tau_{\varphi s}(F(\eta))/\tau_0$ для різних форм контурів L із заданими радіусами кривини ε=ρ/a у вершинах C (рис.2). Тут $F(\eta)=\varepsilon sh(\eta arcsh(1/\varepsilon))$ - функція згущення вузлових точок біля вершини C. Розглянуто контури по дугах парабол ($\rho=b^2/(2a)$) – криві 1, півеліпсів ($\rho=b^2/a$) – криві 2 та фізичних щілин (з прямолінійними горизонтальними ділянками та закругленими по дугах кіл вершинами ρ=b) – криві 3.

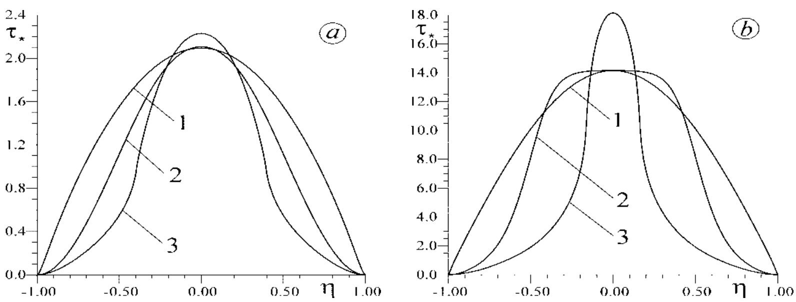

Рис. 2 Залежності напружень $\tau_*(\eta)$ на різних контурах L для ε=0.1 (a), ε=0.001 (b).

Поряд з радіусом кривини у вершинах вирізів форми останніх також суттєво впливають на розподіл напружень (4), що добре видно на прикладі контурів у вигляді фізичних щілин (криві 3). І, якщо для ρ/a=0.1 відносні відхилення максимальних напружень становлять лише 6%, то для ρ/a=0.001 – це вже 22%. Оскільки саме фізична щілина моделює контур реальної тріщини (коли $\rho\to 0$), то отримані результати мають важливе значення для встановлення залежностей між коефіцієнтами інтенсивності напружень у вершинах тріщин і коефіцієнтами концентрації напружень для відповідних закруглених вирізів за кручення пружних тіл. Максимальні напруження (у вершинах C) для еліптичних контурів за різних радіусів кривини збігаються з відомими [3].

1. Саврук М.П., Байдак С.Д., Шабайкович В.О. Кручення пружного простору з тріщиною по поверхні обертання // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1993. – № 6. – С. 87–93.
2. Кравець В.С., Саврук М.П. Напружений стан простору з осесиметричною тріщиною по поверхні обертання / Восьмий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД. – 2011. – С.102–104.
3. Нейбер Г. Концетрация напряжений / Под ред. А.И.Лурье. – М.–Л.: ОГИЗ, 1947. – 204 с.