УДК 539.3

# Про побудову базових розв'язків крайових задач двовимірної теорії пружності в голоморфних функціях від двох комплексних змінних

**Пабирівський В. В.**, к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Розглядається пружне циліндричне тіло $K \cup \partial K$, яке в початковому ненавантаженому стані бієктивно відображається на область $X \cup \partial X$ евклідового простору. Тіло перебуває під дією стаціонарного силового навантаження, яке прикладене до бічної поверхні $\partial X = \partial X_1 \cup \partial X_{\pm 2}$.

У праці [1] сформульована крайова задача двовимірної теорії пружності в голоморфних функціях $\overrightarrow{\Phi}(z_1, z_2)$ $\Phi_0(z_1, z_2)$ двох комплексних змінних. Розглянуто випадок, коли комплексний тензор напружень $\hat{P}(z_1, z_2, z_3)$ не залежить від просторової змінної $x_3$, тобто виконуються умови:

$$\frac{\partial \hat{P}(z_1, z_2, z_3)}{\partial x_3} \equiv \left(i \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3}\right) \hat{P}(z_1, z_2, z_3) = 0.$$

Дана умова накладає в'язі на векторну та скалярну голоморфні функції $\overrightarrow{\Phi}(z_1, z_2)$ $\Phi_0(z_1, z_2)$:

$$\frac{\partial^3 \Phi_0(z_1, z_2)}{\partial z_2^3} + z_2 \frac{\partial^3 \Phi_2(z_1, z_2)}{\partial z_2^3} - (1 - 4\nu) \frac{\partial^2 \Phi_2(z_1, z_2)}{\partial z_2^2} = 0. \tag{1}$$

В цьому випадку компоненти комплексного тензора напружень $\hat{P}(z_1, z_2, z_3)$ набувають вигляду:

$$P_{11} = 2\mu \left[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_1^2} + \frac{(z_1 - iz_2 - z_3)}{2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1^2} + \frac{(z_2 - iz_3 - z_1)}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z_1^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} - \right.$$
$$\left. - 2\nu \left(i \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} + \frac{\partial (\Phi_2 + i\Phi_3)}{\partial z_2}\right)\right];$$

$$P_{22} = 2\mu \left[\frac{1}{1 - 4\nu}\left(z_2 \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial z_2^3} + z_2^2 \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial z_2^3}\right) + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_1^2} - \frac{(z_1 - iz_2 - z_3)}{2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(z_2 - iz_3 - z_1)}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z_1^2} - 2(1 - \nu)\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} + i \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1}\right) - 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z_2}\right)\right];$$

$$P_{33} = 2\mu \left[-\frac{1}{1 - 4\nu}\left(z_2 \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial z_2^3} + z_2^2 \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial z_2^3}\right) - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_2^2} - 2i(1 - \nu) \frac{\partial \Phi_3}{\partial z_2} - \right.$$
$$\left. - 2\nu \left(\frac{\partial (\Phi_1 + i\Phi_2)}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2}\right)\right];$$

$$P_{12} = P_{21} = 2\mu \left[i \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_1^2} + i \frac{(z_1 - iz_2 - z_3)}{2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1^2} + i \frac{(z_2 - iz_3 - z_1)}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z_1^2} - \right.$$
$$\left. - (1 - 2\nu)\left(\frac{\partial (\Phi_2 + i\Phi_1)}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2}\right)\right];$$

$$P_{23} = P_{32} = 2\mu\left[\frac{i}{1-4\nu}\left(z_2\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial z_2^3} + z_2^2\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial z_2^3}\right) + i\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_2^2} - \right.$$
$$\left. -(1-2\nu)\left(\frac{\partial(\Phi_3 + i\Phi_2)}{\partial z_2} + i\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_1}\right)\right];$$

$$P_{31} = P_{13} = -2\mu(1-2\nu)\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_1} + i\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_2}\right).$$

Методику конструктивної побудови розв'язків базових крайових задач теорії пружності методом голоморфних функції $\vec{\Phi}(z_1, z_2)$, $\Phi_0(z_1, z_2)$ двох комплексних змінних, яка подана в роботі [2] застосуємо до двовимірної теорії пружності для заданого циліндричного пружного тіла. Структуру комплексного тензора напружень $\hat{P}^{(k)}$ порядку $k$, в рамках прийнятої методики, визначають скалярна голоморфна функція $\Phi_0(z_1, z_2)$ у формі однорідного многочлена $Q_0^{(k)}$ степеня $k+2$ та голоморфна векторна функція $\vec{\Phi}(z_1, z_2)$ у формі векторного однорідного многочлена $\vec{Q}^{(k)}$ степеня $k+1$ відповідно:

$$Q_0^{(k+2)} = a^{((k+2)0)}z_1^{k+2} + a^{(0(k+2))}z_2^{k+2}, \vec{Q}^{(k+1)} = \vec{b}^{((k+1)0)}z_1^{k+1} + \vec{b}^{(0(k+1))}z_2^{k+1}.$$

При цьому комплексний тензор напружень $\hat{P}^{(k)}$ з врахуванням умови (1) виражається через однорідні многочлени $Q_0^{(k)}$ та $\vec{Q}^{(k)}$ наступним чином:

$$\hat{P}^{(k)} = 2\mu z_1^{k-1}\left[\hat{K}^{(1)}z_1 + \hat{K}^{(3)}(z_2 - iz_3)\right],$$

де $\hat{K}^{(1)}$, $\hat{K}^{(3)}$ – сталі тензорні коефіцієнти, які виражаються через коефіцієнти голоморфних функцій $\Phi_0(z_1, z_2)$, $\vec{\Phi}(z_1, z_2)$.

Подамо структуру векторів напружень на боковій поверхні заданого циліндричного тіла для кожного базового напруженого стану $\hat{P}^{(k)}$ порядку $k$:

– на поверхні $\partial X_1$:

$$\vec{P}_{n_1}^{(k)} \equiv \left(\vec{n}_1 \cdot \hat{P}^{(k)}\right)\Big|_{\partial X_1} = 2\mu\left(\vec{n}_1 \cdot \left[z_1^{(k-1)}\left(\hat{K}^{(1)}z_1 + \hat{K}^{(3)}(z_2 - iz_3)\right)\right]\right)\Big|_{\partial X_1} = P_{(1)m}^{(k)}\vec{e}_m;$$

– на поверхні $\partial X_{\pm 2}$:

$$\vec{P}_{n_{\pm 2}}^{(k)} \equiv \left(\vec{n}_{\pm 2} \cdot \hat{P}^{(k)}\right)\Big|_{\partial X_{\pm 2}} = 2\mu\left((\pm\vec{e}_3) \cdot \left[z_1^{(k-1)}\left(\hat{K}^{(1)}z_1 + \hat{K}^{(3)}(z_2 - iz_3)\right)\right]\right)\Big|_{\partial X_{\pm 2}} =$$
$$= \pm 2\mu\left[z_1^{(k-1)}\left(K_{3m}^{(1)}z_1 + K_{3m}^{(3)}(z_2 - iz_3)\right)\right]\vec{e}_m, \quad (m = \overline{1,3}).$$

Таким чином, граничними умовами для базового напруженого стану $\hat{P}^{(k)}$ порядку $k$ на бокових поверхнях тіла $\partial X_1$, $\partial X_{\pm 2}$ є умови зрівноваження векторів напружень $\vec{P}_{n_1}^{(k)}$, $\vec{P}_{n_{\pm 2}}^{(k)}$ із заданими векторами зовнішнього навантаження $\vec{P}_{n_1}^{(k)(+)}$, $\vec{P}_{n_{\pm 2}}^{(k)(+)}$:

$$\vec{P}_{n_1}^{(k)(+)} = \vec{P}_{n_1}^{(k)}, \quad \vec{P}_{n_{\pm 2}}^{(k)(+)} = \vec{P}_{n_{\pm 2}}^{(k)}.$$

Побудовано базові розв'язки нульового, першого та другого порядків вихідної крайової задачі для заданого циліндричного тіла.


1. В. Пабирівський, Н. Пабирівська. Про формулювання комплексно-спряжених крайових задач просторової теорії пружності в голоморфних функціях двох комплексних змінних // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009–Випуск 9. – С. 100–107.
2. В. Пабирівський, Н. Пабирівська. Розв'язки базових крайових задач двовимірної теорії пружності для циліндричного тіла прямокутного поперечного перерізу // VI міжвузівська науково-технічна конференція науково-педагогічних працівників ІППТ. НУ «Львівська політехніка». – Львів: – 2011. – С. 18.