УДК 517.53

Уточнення теореми А. А. Гольдберга

Андрусяк І. В., к.ф.-м.н., ас. каф. ВМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Нехай L – клас додатних, неперервних, зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій.

Для довільної цілої функції f і кожного $r \geq 0$ покладемо

$M_f(\mathrm{r}) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$

Через Z позначимо клас комплексних послідовностей $\zeta = (\zeta_n)$ таких, що $0 < |\zeta_0| \leq |\zeta_1| \leq \cdots$ і $\zeta_n \to \infty,\ n \to \infty$. Для кожної послідовності $\zeta \in Z$ нехай $n_\zeta = \sum_{|\zeta_n| \leq r} 1$ – її лічильна функція. Скажемо, що ціла функція $f \in A(\zeta)$ тоді і лише тоді, коли послідовність її нулів, занумерована з урахуванням їх кратностей у порядку неспадання їх модулів, співпадає з послідовністю $\zeta \in Z$.

Зростання функції f ототожнюємо зі зростанням її логарифма максимуму модуля $\ln M_f(r)$.

У 1972 році А. А. Гольдберг запропонував здійснювати описання мінімального зростання цілих функцій з класу $A(\zeta)$ безпосередньо через лічильну функцію заданої послідовності нулів, але зовні деякої виняткової множини. Правильна, зокрема, наступна теорема [1].

Теорема А. Для довільної послідовності $\zeta \in Z$ такої, що

$$\underline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{\ln n_\zeta(r)}{\ln r} > 0, \tag{1}$$

і кожного $\varepsilon > 0$ існує ціла функція $f \in A(\zeta)$ для якої

$$\ln \ln M_f(r) = o\big((\ln n_\zeta(r))^{2+\varepsilon}\big),\ \ E \not\ni r \to +\infty, \tag{2}$$

де $E = E(\varepsilon)$ – виняткова множина, яка має скінченну логарифмічну міру, тобто $\int_{E \cap (1,+\infty)} \frac{dr}{r} < +\infty$.

Наступна теорема уточнює теорему А.

Теорема. (i) Нехай $\zeta \in Z$ – довільна послідовність, для якої

$$\underline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{\ln \ln\ n_\zeta(r)}{\ln \ln r} \geq \frac{1}{p-1},\ \ p \geq 1. \tag{3}$$

Тоді існують функція $\varphi \in L$, що задовольняє умову

$$\ln \varphi(x) = o(\ln \ln x),\ \ x \to +\infty, \tag{4}$$

і ціла функція $f \in A(\zeta)$ такі, що виконується співвідношення

$$\ln \ln M_f(r) = o\big((\ln n_\zeta(r))^p\, \varphi(n_\zeta(r))\big),\ \ E \not\ni r \to +\infty,$$

де $E \subset (1;+\infty)$ – множина скінченної логарифмічної міри.

(ii) Для довільної функції $\varphi \in L$ такої, що виконується (4), існує послідовність $\zeta \in Z$, що задовольняє умову (3) така, що для довільної цілої функції $f \in A(\zeta)$ справджується співвідношення

$$(ln\, n_\zeta(r))^p\, \varphi\left(n_\zeta(r)\right) = o(ln\, ln\, M_f(r)),\ \ E_f \ni r \to +\infty,$$

де $E_f \subset (1;+\infty)$ – множина нескінченної логарифмічної міри.

З цієї теореми можна зробити висновок, що умову (1) в теоремі А можна замінити слабшою умовою

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln\ n_\zeta(r)}{\ln\ln r} \geq 1.$$

Більше того, за цієї умови існує ціла функція $f \in A(\zeta)$, для якої співвідношення (2) виконується з винятковою множиною E, яка не залежить ні від f, ні від ε.

1. А. А. Гольдберг. О представлении мероморфной функции в виде частного целых функций / Гольдберг А.А. // Изв. вузов. Мат. – 1972. – В 10 (125). – С.13–17.