УДК 539.3

Нетрадиційний підхід до дослідження антиплоскої деформації дволанкової тріщини у просторі за малих кутів між ланками

Васільєв К. В., к.ф.-м.н., м.н.с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна)

У роботі [1] запропоновано новий підхід дослідження задач теорії тонких неоднорідностей, зокрема й тонких тріщин з точками зламу – метод додаткових зосереджених чинників (МДЗЧ). Проте верифікація методу була здійснена лише для випадку досить великих кутів розхилу дволанкового дефекта. У цій роботі дослідимо можливість застосування МДЗЧ у разі малих кутів α розхилу дволанкової тріщини L у просторі за дії поздовжнього зсуву τ на нескінченості (рис. 1).

Відповідно до методу функцій стрибків неоднорідність вилучаємо з розгляду, а її вплив на напружений стан тіла моделюємо функціями стрибків векторів напружень і похідних переміщень на її серединній поверхні.

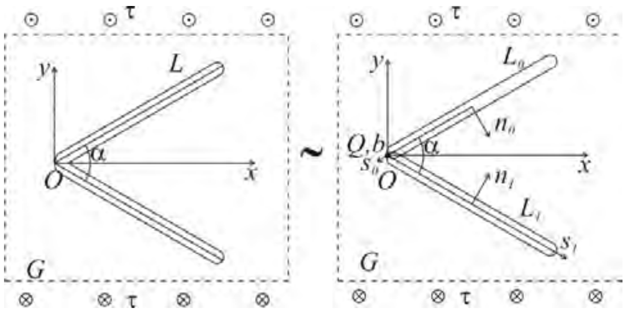

Рис. 1 Схема застосування методу додаткових зосереджених чинників

Основна ідея МДЗЧ полягає у наступному. Загалом пружне включення з кутовою точкою розглядається як сукупність ніби відокремлених стрічкових неоднорідностей L_0, L_1, кожна з яких моделюється своїми функціями стрибків напружень f_{50}, f_{51} і похідних від переміщень f_{60}, f_{61}. Оскільки метод функцій стрибків у випадку антиплоскої деформації з фізичної точки зору є моделюванням тонких неоднорідностей за допомогою розподілених уздовж осьових ліній дефектів зосереджених сил і гвинтових дислокацій наперед невідомої густини, то у точці O дотику включень функції стрибків ланок L_0 та L_1, очевидно, пов'язані між собою. Цей зв'язок заздалегідь невідомий, тому спочатку накладемо додаткові умови рівності нулю функцій стрибків у цій точці:

$$f_{50}(O) = f_{60}(O) = 0, \quad f_{51}(O) = f_{61}(O) = 0. \tag{1}$$

А через те, що у точці O первісної задачі існує певний, швидше всього ненульовий, стрибок напружень і похідних від переміщень, то для підправлення накладеного формулою (1) обмеження, додатково розмістимо у цій точці невідомі за величиною зосереджену силу Q і гвинтову дислокацію b, які мають забезпечити згаданий стрибок. Таким чином, напружений стан модельованої задачі шукатимемо у вигляді розв'язків для двох включень та невідомих зосередженої сили і дислокації, що діють у точці O контакту неоднорідностей:

$$\sigma_{yz}+i\sigma_{xz}=\sigma_{yz}^{0}+i\sigma_{xz}^{0}+\frac{i}{2\pi}\sum_{p=0}^{1}\int_{L_p'}\frac{f_{5p}(t)+iGf_{6p}(t)}{te^{i\alpha_p}-(z-z_{0p})}dt+\left(\sigma_{yz}^{*}+i\sigma_{xz}^{*}\right),$$
$$\sigma_{yz}^{*}+i\sigma_{xz}^{*}=-\frac{i}{2\pi}\frac{Q+iGb}{z-z^{*}},\ z_{0p}=x_{0p}+iy_{0p},\ z^{*}=x^{*}+iy^{*}. \tag{2}$$

Тут $\sigma_{yz}^{0}=\tau$, $\sigma_{xz}^{0}=0$ – однорідний розв'язок задачі; σ_{yz}^{*}, σ_{xz}^{*} – напруження від дії сили Q і дислокації b в точці O із координатами $z^{*}=0$ контакту неоднорідностей; z_{0p} – координати центру p-го включення; α_p – кут його орієнтації; G – модуль пружності тіла.

Для визначення невідомих f_{5j}, f_{6j} ($j=0,1$) необхідно скористатися умовами взаємодії матриці з включеннями. Для пружної тонкої плівки завдовжки $2a_p$, завтовшки $2h$ з довільним сталим модулем зсуву G_B умови взаємодії подаються у вигляді [1, 2]

$$\sigma_{sz}^{p+}+\sigma_{sz}^{p-}+\frac{G}{G_{\text{B}}h}\int_{-a_p}^{s_p}\left(\sigma_{nz}^{p+}-\sigma_{nz}^{p-}\right)dt=2\frac{G\sigma_{sz}^{pc}(-a_p)}{G_{\text{B}}};$$
$$\sigma_{nz}^{p+}+\sigma_{nz}^{p-}-\frac{G_{\text{B}}}{hG}\int_{-a_p}^{s_p}\left(\sigma_{sz}^{p+}-\sigma_{sz}^{p-}\right)dt=\frac{w_p^{*}}{h}; \tag{3}$$
$$\sigma_{sz}^{cp}(-a_p)=\sigma_{sz}^{0}(-a_p)\frac{G_{\text{B}}}{\max(G_{\text{B}},G)},w_p^{*}=2h\sigma_{nz}^{0}(-a_p)\frac{\min(G_{\text{B}},G)}{G}.$$

Тут $\sigma_{sz}^{p\pm}$, $\sigma_{nz}^{p\pm}$ – граничні значення напружень на верхньому (+) і нижньому (–) березі p-ї неоднорідності. Скористаємося формулами Сохоцького-Племелі для визначення граничних значень з (2) та підставивши отриманий результат в (3) одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків. Дві додаткові рівності задані умовами глобальної рівноваги дволанкового включення і умовами однозначності переміщень при обході навколо нього

$$\int_{-a_0}^{a_0}f_{60}(t)dt+\int_{-a_1}^{a_1}f_{61}(t)dt+b=0,\ \int_{-a_0}^{a_0}f_{50}(t)dt+\int_{-a_1}^{a_1}f_{51}(t)dt+Q=0. \tag{4}$$

Розглянемо ламану тріщину як дуже податне дволанкове включення з відносним модулем пружності $G_B/G=10^{-7}$. Розв'язавши результуючу з (2), (3) систему сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами (1), (4), визначимо як невідомі функції стрибків, так і невідомі величини зосередженої сили і дислокації. Виявлено, що коефіцієнти інтенсивності напружень дволанкової тріщини для малих кутів між ланками за абсолютною величиною мало відрізняються від результатів обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень для двох паралельних тріщин, центри яких є близько розташовані (для цього випадку нормовані коефіцієнти інтенсивності напружень дорівнюють 0,5).

1. Васільєв К.В. Поздовжній зсув безмежного тіла з тонким дволанковим пружним включенням / Васільєв К.В., Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. // Вісн. Дон. нац. ун-ту, Сер. А: Природничі науки – **2**. – 2010 р. – С. 55–64.
2. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія / Сулим Г.Т. – Львів: дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007 р. – 716 с.