УДК 517.9

Гамільтонові потоки на розширенні спряженого простору до алгебри Лі матричних супер-інтегро-диференціальних операторів двох антикомутативних змінних

Гентош О. Є., к.ф.-м.н., с. н. с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна)

На спряженому просторі g^* до алгебри Лі g матричних супер-інтегро-диференціальних операторів двох антикомутативних змінних θ_1 та θ_2 у вигляді [1]

$$A := a_{0,q}\partial^q + \sum_{j<q} a_j \partial^j, \quad q \in \mathbf{N}, \quad j \in \mathbf{Z}_+,$$
$$a_j := a_{0,j} + a_{1,j}D_{\theta_1} + a_{3,j}D_{\theta_2} + a_{2,j}D_{\theta_1}D_{\theta_2}, \quad a_{r,j} \in C^\infty\left(\mathrm{S}\times\Lambda_1^2; \mathrm{gl}(m\,|\,n)\right),$$

де $a_{r,j} := a_{r,j}^0 + \theta_1 a_{r,j}^1(x) + \theta_2 a_{r,j}^3(x) + \theta_1\theta_2 a_{r,j}^2(x),\ r = \overline{0,3},\quad x \in \mathbf{S} \cong \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z},\quad \partial := \partial/\partial x,\quad \theta_1, \theta_2 \in \Lambda_1$, $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ – алгебра Грассмана над полем $\mathbf{C}$, $\Lambda_0 \supset \mathbf{C}$, $D_{\theta_\ell} := \partial/\partial\theta_\ell + \theta_\ell\,\partial/\partial x,\ \ell = 1,2$, відносно скалярного добутку

$$(A, B) = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta_1 d\theta_2 \ \mathrm{res\ sSp}\,(AB), \quad A, B \in g,$$

де символ "res" позначає коефіцієнт при оператору $D_{\theta_1}D_{\theta_2}\partial^{-1}$, а "sSp" – суперслід суперматриці [2], розглядається ієрархія гамільтонових потоків типу Лакса

$$dl/dt_p = \left[(grad\,\gamma_p(l))_+, l\right], \quad \gamma_p(l) = \frac{q}{p+q}\int_0^{2\pi} dx \int d\theta_1 d\theta_2\, l^{(p+q)/q}, \quad l \in g^*, \tag{1}$$

де нижній індекс "+" позначає диференціальну частину відповідного оператора, $t_p \in \mathbf{R}$, породжених R-деформованою дужкою Лі-Пуассона [1] на g^* та функціоналами Казіміра $\gamma_p \in I(g^*),\ p \in \mathbf{N}$. Досліджується проблема існування гамільтонового зображення для ієрархії потоків (1), спарених з еволюціями

$$\begin{aligned} dF_i/dt_n &= (grad\,\gamma_n(l))_+ F_i, \quad dF_i^*/dt_n = -(grad\,\gamma_n(l))_+^* F_i^*, \\ d\Phi_i/dt_n &= (grad\,\gamma_n(l))_+ \Phi_i, \quad d\Phi_i^*/dt_n = -I(grad\,\gamma_n(l))_+^* I\Phi_i^*, \end{aligned} \tag{2}$$

де $I := diag\,(\underbrace{1,\dots,1}_{m}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{n})$, власних функцій $F_i \in W := L_2\left(\mathbf{S}\times\Lambda_1^2; \Lambda_0^m \times \Lambda_1^n\right)$ і $\Phi_i \in \widetilde{W} := L_2\left(\mathbf{S}\times\Lambda_1^2; \Lambda_1^m \times \Lambda_0^n\right)$ пов'язаної з рівнянням (1) спектральної задачі, які відповідають власним значенням $\lambda_i \in \mathbf{C},\ i = \overline{1,N},\ N \in \mathbf{N}$, та власних функцій $F_i^* \in W$ і $\Phi_i^* \in \widetilde{W}$ спряженої до неї, які відповідають власним значенням $\bar{\lambda}_i \in \mathbf{C},\ i = \overline{1,N},\ N \in \mathbf{N}$.

Теорема. *Для будь-якого* $p \in \mathbf{N}$ *спарена динамічна система* (1)-(2) *на розширеному фазовому просторі* $g^* \times W^{2N} \times \widetilde{W}^{2N}$ *є гамільтоновою відносно пуассонової структури* $\Theta: T^*(g^* \times W^{2N} \times \widetilde{W}^{2N}) \to T(g^* \times W^{2N} \times \widetilde{W}^{2N})$, *яка виникає при перетворенні Беклунда*

$$(l_+, F_i, F_i^*, \Phi_i, \Phi_i^*)^{\mathrm{T}} \mapsto (l, F_i, F_i^*, \Phi_i, \Phi_i^*)^{\mathrm{T}}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{3}$$

де

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$l = l_+ + \sum_{i=1}^{N} (F_i D_{\theta_1} D_{\theta_2}^{-1} \otimes F_i^* + \Phi_i D_{\theta_1} D_{\theta_2}^{-1} \otimes \Phi_i^*), \tag{4}$$

тензорного добутку R-деформрваної дужки Лі-Пуассона [1] *на* g^* *та дужки Пуассона на* $W^{2N} \times \widetilde{W}^{2N}$ *, заданої парною суперсимплектичною структурою* [2] *у вигляді* $\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^{N} (d(IF_i) \wedge dF_i^* + d(I\Phi_i) \wedge d\Phi_i^*)$, *де* $\wedge$ *– оператор зовнішнього добутку диференціальних форм, і гамільтоніаном* $\gamma_p \in I(g^*)$.

Для супер-інтегро-диференціальних операторів у вигляді (4) за допомогою перетворення Беклунда (3) встановлено, що пуассонова структура Θ та натуральні степені власних значень $\lambda_k \in \mathbf{C}$, $k = \overline{1, N}$, як гладкі за Фреше функціонали на $g^* \times W^{2N} \times \widetilde{W}^{2N}$, породжують на розширеному фазовому просторі $g^* \times W^{2N} \times \widetilde{W}^{2N}$ ієрархію спарених динамічних систем

$$\begin{gathered} dl/d\tau_{s,k} = -[M_k^s, l] + [M_k^s, l_-]_+ = dl/d\bar{\tau}_{s,k} + [M_k^s, l_-]_+, \\ dF_i/d\tau_{s,k} = (-M_k^s + \delta_k^i l^s) F_i, \quad dF_i^*/d\tau_{s,k} = (M_k^s - \delta_k^i l^s)^* F_i^*, \\ d\Phi_i/d\tau_{s,k} = (-M_k^s + \delta_k^i l^s)\Phi_i, \quad d\Phi_i^*/d\tau_{s,k} = I\,(M_k^s - \delta_k^i l^s)^* I\Phi_i^*, \end{gathered} \tag{5}$$

де $\tau_{s,k}, \bar{\tau}_{s,k} \in \mathbf{R}$, $M_k^s := \sum_{\rho=0}^{s-1} ((l^\rho F_k) D_{\theta_1} D_{\theta_2}^{-1} \otimes ((l^*)^{s-1-\rho} F_k^*) + (l^\rho \Phi_k) D_{\theta_1} D_{\theta_2}^{-1} \otimes (I (l^*)^{s-1-\rho} I\Phi_k^*)) = \sum_{\rho=0}^{s-1} \lambda^\rho \bar{\lambda}^{s-1-\rho} M_k^1$, $\mathrm{s} \in \mathbf{N}$, $k = \overline{1, N}$, а нижній індекс "–" позначає інтегральну частину відповідного оператора. Для будь-яких $\mathrm{s} \in \mathbf{N}$ та $k = \overline{1, N}$ перше рівняння у формулі (5) не має комутаторного вигляду, а отже, не є ізоспектральним.

Таким чином, на відміну від випадку супер-інтегро-диференціальних операторів однієї антикомутативної змінної, розглянутого у роботі [3], векторні поля $d/d\tau_{s,k}$, $\mathrm{s} \in \mathbf{N}$, $k = \overline{1, N}$, не можуть бути використані для введення у (1|2+1)-вимірну динамічну систему, задану потоком типу Лакса з ієрархії (1)-(2), додаткових комутативних змінних із збереженням її інтегровності за Лаксом. Оскільки для векторних полів $d/d\bar{\tau}_{s,k}$, $\mathrm{s} \in \mathbf{N}$, $k = \overline{1, N}$, на $g^* \times W^{2N} \times \widetilde{W}^{2N}$ мають місце співвідношення

$$\begin{gathered} dl/d\bar{\tau}_{s,k} = -[M_k^s, l], \\ dF_i/d\bar{\tau}_{s,k} = dF_i/d\tau_{s,k}, \quad dF_i^*/d\bar{\tau}_{s,k} = dF_i^*/d\tau_{s,k}, \\ d\Phi_i/d\bar{\tau}_{s,k} = d\Phi_i/d\tau_{s,k}, \quad d\Phi_i^*/d\bar{\tau}_{s,k} = d\Phi_i^*/d\tau_{s,k}, \end{gathered}$$

то саме з їх допомогою можна отримати інтегровні за Лаксом (2|2+1)-вимірні суперсиметричні матричні динамічні системи. Показано, що у випадку, коли $N = 2$, векторні поля $d/d\tau := d/d\bar{\tau}_{1,1}$ та $d/dT := d/dt_2 + d/d\bar{\tau}_{2,1}$, діючи на власні функції $F_i, F_i^*, \Phi_i, \Phi_i^*$, $i = 1,2$, породжують суперсиметричний аналог з двома антикомутативними змінними (2|1+1)-вимірної матричної динамічної системи Деві-Стюартсона [3], який володіє потрійною лінеаризацією типу Лакса.

1. Oevel W., Popowicz Z. The bi-Hamiltonian structure of fully supersymmetric Korteweg-de Vries systems / W. Oevel // Commun. Math. Physics. — 1991. —V. 139. — P. 441 — 460.
2. Березин Ф.А. Введение в алгебру с антикоммутирующими переменными / Ф.А. Березин. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. — 208 с.
3. Гентош О.Є. Лі-алгебраїчна структура інтегровних за Лаксом (2|1+1)-вимірних суперсиметричних матричних динамічних систем / О.Є. Гентош // Укр. матем. журнал. — 2011. — 16 с. (подано до друку)

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua