УДК 512.64+512.55

Однозначність кліткoво-діагонально паралельних факторизацій матриць

Джалюк Н. С., к.ф.-м.н., м.н.с. відділу алгебри
Петричкович В. М., д.ф.-м.н., с.н.с., зав. відділу алгебри

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна)

Нехай R – комутативна область головних ідеалів, $M(n,R)$ – кільце $n \times n$-матриць над R, D^A – канонічна діагональна форма (форма Сміта) матриці $A \in M(n,R)$, тобто $D^A = UAV = diag(\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0)$, $\mu_r \neq 0$, де $\mu_i | \mu_{i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$, $U, V \in GL(n,R)$. Діагональну матрицю $diag(d_1, \dots, d_n)$, в якій $d_i | d_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, називають d-матрицею. Нагадаємо, що факторизації $A = B_1C_1$, $A = B_2C_2$, $B_i, C_i \in M(n,R), i = 1,2$, матриці $A \in M(n,R)$ називають асоційованими, якщо існує така матриця $V \in GL(n,R)$, що $B_2 = B_1V$, $C_2 = V^{-1}C_1$.

З.І. Боревич [1] сформулював задачу про опис з точністю до асоційовності факторизацій матриць над кільцем R, зокрема вказав, що існує єдина з точністю до асоційовності факторизація $A = BC$ матриці A, коли $D^A = D^B D^C$. В [2] встановлені умови єдиності з точністю до асоційовності паралельних факторизацій матриць над R. У цій праці вказані умови єдиності з точністю до асоційовності кліткoво-діагонально паралельних факторизацій кліткoво-діагональних матриць над R.

Нехай далі $A = diag(A_1, \dots, A_k)$ – неособлива кліткoво-діагональна матриця над R, $A_i \in M(n_i, R)$ – її діагональні клітки, $i = 1, \dots, k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Позначимо через D – кліткoво-діагональну матрицю вигляду

$$D = diag(D^{A_1}, \dots, D^{A_k}), \tag{1}$$

де D^{A_i} – канонічні діагональні форми діагональних кліток A_i матриці A. Нехай матриця D розкладена на кліткoво-діагональні множники, тобто

$$D = \Phi\Psi = diag(\Phi_1, \dots, \Phi_k) diag(\Psi_1, \dots, \Psi_k), \tag{2}$$

де $\Phi_i = diag(\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{in_i})$, $\Psi_i = diag(\psi_{i1}, \dots, \psi_{in_i})$ та Φ_i є d-матрицями, $i = 1, \dots, k$.

Кліткoво-діагональну факторизацію

$$A = BC = diag(B_1, \dots, B_k) diag(C_1, \dots, C_k), \tag{3}$$

де $B_i, C_i \in M(n_i, R)$, матриці A таку, що $D^{B_i} = \Phi_i$ та матриці C_i еквівалентні до Ψ_i, $i = 1, \dots, k$, називатимемо кліткoво-діагонально паралельною до факторизації (2) матриці D.

Теорема. Кліткoво-діагональна факторизація (3) матриці A кліткoво-діагонально паралельна до факторизації (2) матриці D, що має вигляд (1), є єдиною з точністю до асоційовності тоді і тільки тоді, коли матриці Ψ_i є d-матрицями, $i = 1, \dots, k$.

1. Боревич З. И. О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов / З. И. Боревич // III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей. Тарту, 21–24 сен. 1976 г. – Тез. сообщ. – Тарту: Тарт. ун-т, 1976. – С. 19.
2. Петричкович В.М. Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів / В.М. Петричкович // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, №4. – С. 96-100.