УДК 3.539

Інтегральне рівняння для аналізу стійкості плоскої форми рівноваги колони труб

Величкович А. С.[1], к.т.н., доц. каф. теоретичної механіки
Бедзір О. О.[2], к.ф.-м.н., наук. співр. відділу моделювання демпфуючих систем

[1] Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу (вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна)
[2] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна)

Вивчення питань стійкості колон труб має важливе прикладне значення. Дослідження питань стійкості та напружено-деформованого стану, а також взаємодії бурильної і обсадної колон між собою та зі стінками свердловини, дослідження стійкості колон насосно-компресорних труб і штанг дозволяють оцінювати та коригувати експлуатаційний ресурс обладнання [1, 2]. Тому розвиток способів та зміна підходів щодо аналізу стійкості рівноваги колони труб є вельми актуальним питанням.

Дослідженню стійкості колон труб, зокрема бурильних колон, колон насосно-компресорних труб та штанг, присвячено багато праць. Зазвичай пружну стійкість колони труб описують диференціальним рівнянням згину, іноді додатково враховуючи кручення, відцентрові сили, опір середовища тощо. Широко відомі прийоми зведення вихідних диференціальних рівнянь до стандартного рівняння Бесселя, визначення загального розв’язку лінійною комбінацією функцій Ейрі, представлення розв’язку у вигляді степеневого ряду, енергетичні та інші асимптотичні та числові методи [1–3]. Не зважаючи на різноманіття методів і способів оцінки стійкості колон труб, єдиного стандартизованого вирішення таких задач із заздалегідь встановленим рівнем коректності одержуваних результатів досі немає.

У цій роботі виконана спроба змінити саму концепцію підходу до форми запису вихідного рівняння задачі про стійкість колони. Метою є отримання інтегрального рівняння стійкості, в якому невідома функція прогину колони буде знаходитись під знаком інтеграла. Перевагами апарату теорії інтегральних рівнянь над методами теорії диференційних рівнянь, є їх висока універсальність, чіткість фізичної інтерпретації, надійність операцій інтегрування при чисельному розв’язку. Передбачається, що завдяки такому підходу вдасться простіше одержувати більш інформативні розв’язки деяких задач стійкості. На сьогодні такий підхід в технічній літературі до аналізу стійкості колони залишається поза увагою.

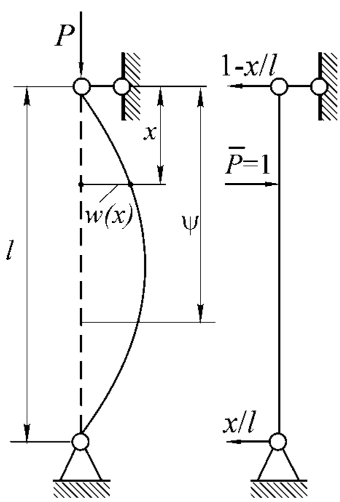

Рис. 1

Розглянемо найбільш простий випадок механіко-математичної моделі колони – стиск шарнірно-обпертого стержня (рис. 1). Для визначення прогину в поперечці x скористаємось методом Мора:

$$w(x)=\int_0^l \frac{M(\phi)\overline{M}(\phi)}{E(\phi)J(\phi)}d\phi\,, \tag{1}$$

де $E(\phi)J(\phi)$ – жорсткість стержня на згин, $M(\phi)=Pw(\phi)$ – згинальний момент від дії зовнішніх навантажень в довільному поперечці,

$$\overline{M}(\phi)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)\phi, & при\ \phi\le x,\\ \left(1-\dfrac{\phi}{l}\right)x, & при\ \phi\ge x.\end{cases}$$ – згинальний момент від дії одиничної сили.

Увівши безрозмірні координати $x_0=x/l,\ \zeta=x/l$ вираз (1) представимо у вигляді

$$w(x_0)=\int_0^{x_0}\frac{1}{EJ}Pl^2\zeta(1-x_0)w(\zeta)d\zeta+\int_{x_0}^{1}\frac{1}{EJ}Pl^2x_0(1-\zeta)w(\zeta)d\zeta\ . \qquad (2)$$

Рівняння (2) шляхом перетворень зводиться до однорідного інтегрального рівняння Фредгодьма 2-го роду

$$y(x_0)=\lambda\int_0^1 K(x_0,\zeta)y(\zeta)d\zeta\ , \qquad (3)$$

де $\lambda=Pl^2/E_0J_0$, $y(x_0)=w(x_0)\sqrt{\varphi(x_0)}$, $K(x_0,\zeta)=\Phi(x_0,\zeta)\sqrt{\varphi(\zeta)}\sqrt{\varphi(x_0)}$, $\dfrac{1}{E(\zeta)J(\zeta)}=\dfrac{\varphi(\zeta)}{E_0J_0}$,

$$\Phi(x_0,\zeta)=\begin{cases}(1-x_0), & якщо\quad \zeta\le x_0,\\ (1-\zeta_0), & якщо\quad \zeta\ge x_0.\end{cases}$$

Отримане рівняння повністю замінює диференціальне рівняння стійкості разом з крайовими умовами [5]. Характеристичні числа рівняння (3) визначають перше (найменше) та наступні критичні навантаження на стержень. Для визначення характеристичних чисел найпростіше скористатись теорією симетричних інтегральних рівнянь Гільберта–Шмідта [4]. В цьому разі перше характеристичне число можна виразити через сліди ядра. В першому наближенні можна прийняти $\lambda_1^2=1/S_2$, де S_2 визначається за формулою

$$S_2=\int_0^1\int_0^1 K(x_0,\zeta)y(\zeta)dx_0d\zeta\ , \qquad (4)$$

Запропоновану механіко-математичну модель протестовано на задачі про стиск шарнірно-обпертого стержня. Отримано значення критичного навантаження $P_{кр}=9{,}5\,EJ/l^2$, що вже в першому наближенні практично співпадає з точним результатом.

У подальшому планується з допомогою отриманого рівняння (3) розв’язати задачу про стійкість стержня, що коаксіально вставлений із невеликим зазором в жорстку трубу і знаходиться під дією рівномірно розподіленого по довжині стержня навантаження, та на базі розв’язків цієї задачі аналізувати деякі випадки стійкості плоскої форми рівноваги нижньої частини бурильної колони.

1. Рекин С. А., Янтурин А. Ш. Устойчивость, упругая деформация, износ и эксплуатация бурильных и обсадных колонн (Механика системы "колонна – скважина – пласт"). – Санкт-Петербург: Недра, 2005.– 439 с.
2. Вагапов С. Ю. Устойчивость колонн насосно-компрессорных труб и штанг глубинонасосной установки. Уфа: Уфимский государственный нефтяной технический університет, – 2000. – 133 с.
3. Григулецкий В. Г. Оптимальное управление при бурении скважин. – М.: Недра, 1988. – 229 с.
4. Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. – 608 с.
5. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. – К.: Вища шк., 1993.– 655 с.