

УДК 539.3:534.1

Про аналогію в хвильових задачах для ступінчатих стержнів

Перепічка В. В., к.ф.-м.н., с.н.с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3^б, м. Львів, 79060, Україна)

Розглядається задача для напівнескінченного однорідного двоступінчатого стержня, що навантажується повздовжнім ударом з відскоком, який в математичному плані може бути поданий через дельтувату функцію Дірака. В рамках технічної теорії Бернуллі поставлення зводиться до двох, зв'язаних умовами зшивання, крайових задач для хвильового рівняння. Використовуючи перетворення Лапласа, в обезрозмірених змінних отримано аналітичний розв'язок задачі у вигляді розвинення в нескінченний ряд для кожної з ділянок зокрема. Наявність в кожному члені ряду множника у вигляді функції Гевісайда з відповідним зсувом аргумента робить ряд скінченим для довільно вибраного моменту часу, тобто форма подання розв'язку зручна для дослідження перехідних процесів. В випадку навантаження стержня іншим чином, розв'язок записується як згортка функції навантаження та фундаментального розв'язку.

Водночас розв'язується задача коливаль для простого стержня, що прикріплений до нерухомого масиву через в'язкий демпфер. Отриманий розв'язок є аналоговим до подання коливаль скінченної ділянки ступінчатого стержня. Нескінченна ділянка тотожна в'язкому демпферу за умови:

$$\beta = A_{\infty} / A_f = \gamma / (A_d \sqrt{\rho E}) \Rightarrow \gamma = A_{\infty} A_d \sqrt{\rho E} / A_f .$$

Тут позначено: β – формально спільний в обох задачах параметр ($0 \leq \beta < \infty$); A_f , A_{∞} , A_d – площі попереччя ділянок ступінчатого та простого стержнів відповідно; ρ , E – густина та модуль Юнга матеріалу простого стержня; γ – в'язкість поршня.

В отриманому розв'язку задачі з демпфером для значень $\beta = 1$ чинний лишень перший доданок (пряма хвиля збурення), всі решту рівні нулю (відбиті хвилі відсутні). Наприклад, при ударі з утриманням простий стержень після проходження прямої хвилі починає рухатися рівномірно, фізика процесу стає зрозумілою, коли згадати про аналогову задачу – напівнескінченний двоступінчатий стержень.

Модуль виразу $D = (1 - \beta) / (1 + \beta)$ характеризує: в задачі про двоступінчатий стержень відведення енергії в нескінченну ділянку, при $D = \pm 1$ відтоку немає, отримуємо розв'язки для вільного і консольного стержнів відповідно; в задачі про стержень з поршнем логарифмічний декремент затухання коливаль, якому відповідає величина $\ln(\text{mod } D)$. В рамках підходу гармонійного аналізу для розглядуваних задач знак параметра D визначає розподіл власних частот: при від'ємному значенні власні частоти такі ж як у консолі, при додатному – як у незакріпленого стержня. Дискретний фактор в'язкості в закріпленні простого стержня з розподіленими параметрами не зсуває частот, а лише визначає їх тип.

В розглянутих задачах аналоговими величинами, з одного боку, є відношення площ перерізів ділянок, а з іншого – відношення в'язкості поршня до в'язкості поперечного перерізу стержня на фронті прямої хвилі. Слід зауважити, що прийняті обмеження не є принциповими, такого типу задачі є аналоговими і у випадку багатоступінчатого стержня з ділянками різного перерізу чи матеріалу. Отримані результати, при відповідному трактуванні, можуть бути перенесені і на крутні коливання.