УДК 517.95

Метод побудови часткових розв'язків задачі з нелокальною умовою для рівняння із частинними похідними у випадку існування неєдиного її розв'язку

Каленюк П. І.[1,2], д.ф.-м.н., проф., директор ІМФН
Когут І. В.[1], к. ф.-м.н., доцент каф. ОМП
Нитребич З. М.[1], к. ф.-м.н., с.н.с., доцент каф. ОМП

[1] Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)
[2] Жешувський університет
(ал. Рейтана, 16с, м. Жешув, 35-959, Польща)

Задачі з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними є загалом некоректними крайовими задачами. Це пов'язано, наприклад, з тим, що існують нетривіальні розв'язки однорідної задачі, тобто нетривіальні розв'язки однорідного рівняння, що задовольняють однорідні нелокальні умови. Ця обставина зумовлює факт, що розв'язки неоднорідної задачі можуть або не існувати або бути неєдиними.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]U(t,x)=0, \quad t\in(0,h),\ x\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(0,x)+q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(h,x)=\varphi(x), \quad x\in\mathbf{R}, \tag{2}$$

де $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальний вираз, загалом, нескінченного порядку та цілим символом $a(\nu)\neq\text{const}$, $\nu\in\mathbf{R}$, $h\in\mathbf{R}$, $h>0$, $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами.

Для побудови часткових розв'язків задачі (1), (2) у випадку існування її неєдиного розв'язку будемо використовувати диференціально-символьний метод [1, 2].

Теорема. Нехай права частина умови (2) є квазіполіномом вигляду $\varphi(x)=Q(x)e^{\beta x}$, де $Q(x)$ – довільний поліном з комплексними коефіцієнтами, причому $\beta\in\{\nu\in\mathbf{C}:\ \eta(\nu)=0\}$, $\eta(\nu)\equiv p(\nu)+q(\nu)e^{a(\nu)h}$. Тоді існує неєдиний розв'язок задачі (1), (2), один з часткових розв'язків якої можна знайти за формулою

$$U(t,x)=Q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{e^{a(\nu)t+\nu x}-e^{a(\beta)t+\beta x}\sum_{k=0}^{p_\beta-1}\frac{(\nu-\beta)^k}{k!}x^k}{\eta(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=\beta},$$

де p_β – кратність нуля β функції $\eta(\nu)$.

1. Каленюк, П.І.. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод [Текст] / П.І. Каленюк, З.М. Нитребич. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка", 2002. – 292 с. – ISBN 966-533-248-0.
2. Каленюк, П.И. Обобщенный метод разделения переменных [Текст] / П.И. Каленюк, Я.Е. Баранецкий, З.Н. Нитребич. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua