УДК 517.95

Задача Діріхле–Неймана для безтипної системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

Пташник Б. Й.[1], д.ф.-м.н., завідувач відділу математичної фізики
Репетило С. М.[2], аспірант каф. ПМ

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна)
[2] Національний університет «Львівська політехніка» (вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

В області $D=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{p+1}: t\in(0,T), x\in\Omega_{2\pi}^p\}$, $\Omega_{2\pi}^p$ – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $p\in\mathbb{N}$, розглянемо задачу

$$\sum_{|s|^*\le 2n} A_s \frac{\partial^{|s|^*}u(t,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x_1{}^{s_1}\cdots\partial x_p{}^{s_p}} = f(t,x), \qquad (t,x)\in D, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)}u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^{2r-1}u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = 0, \qquad x\in\Omega_{2\pi}^p, r\in\{1,\dots,n\}, \tag{2}$$

де $s=(s_0,s_1,\dots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|s|^*=2s_0+s_1+\dots+s_p$, A_s – $m\times m$-матриці зі сталими дійсними елементами, причому $\det A_{n,0,\dots,0}\neq 0$, $u(t,x)=col\big(u_1(t,x),\dots,u_m(t,x)\big)$, $f(t,x)=col\big(f_1(t,x),\dots,f_m(t,x)\big)$. Припустимо, що

$$f(t,x)=\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{|k|\ge 0} f_{\tilde k}\sin\big((k_0+1/2)\,\pi/T\,t\big)\exp(ik,x), \tag{3}$$

де $k_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $(k,x)=k_1x_1+\dots+k_px_p$, $\tilde k=(k_0,k)\in \mathrm{K}:=(\mathbb{N}\cup\{0\})\times\mathbb{Z}^p$, $|\tilde k|=k_0+|k_1|+\dots+|k_p|$, $f_{\tilde k}=col(f_{\tilde k1},\dots,f_{\tilde km})\in\mathbb{R}^m$,

$$f_{\tilde k j}=\frac{2}{(2\pi)^pT}\int_0^T\int_{\Omega^p} f_j(t,x)\sin\left(\left(k_0+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}t\right)\exp(-ik,x)dtdx.$$

Розв’язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x)=\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{|k|\ge 0} u_{\tilde k}\sin\big((k_0+1/2)\,\pi/T\,t\big)\exp(ik,x), \tag{4}$$

де $u_{\tilde k}=col(u_{\tilde k1},\dots,u_{\tilde km})$. Кожен член ряду (4) задовольняє умови (2), оскільки функції $\sin\big((k_0+1/2)\,\pi/T\,t\big)$, є власними функціями задачі $y''+\lambda y=0$, $y(0)=y'(T)=0$, які відповідають власним значенням $\lambda_{k_0}=(k_0+1/2)^2(\pi/T)^2$, $k_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Підставляючи ряди (3) і (4) в (1), отримуємо для визначення компонент кожного вектора $u_{\tilde k}$, $\tilde k\in\mathrm{K}$ лінійну систему алгебричних рівнянь

$$\sum_{|s|^*\le 2n}(-1)^{s_0}A_s(k_0+1/2)^{2s_0}(ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}\omega^{2s_0}u_{\tilde k}=f_{\tilde k}, \qquad \omega=\pi/T, \tag{5}$$

визначник якої позначимо через $\Delta(\tilde k,\omega)$.

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\bar{C}^{2n}(\bar{D})$ необхідно і досить, щоб рівняння $\Delta(\tilde{k},\omega)=0$ не мало розв'язків у цілих числах $k_0,k_1,\dots,k_p,\tilde{k}\in$ K, де $\bar{C}^r(\bar{D})$ − простір вектор-функцій $v(t,x)=(v_1(t,x),\dots,v_m(t,x))$, для яких $v_j\in C^r(\bar{D})$, $j\in\{1,\dots,m\}$.

Припустимо, що задача (1), (2) не може мати двох різних розв'язків із простору $\bar{C}^{2n}(\bar{D})$. Тоді для кожного вектора $\tilde{k}$, $\tilde{k}\in$ K, система рівнянь (5) має єдиний розв'язок, який зображають формули

$$u_{\tilde{k}j}=\sum_{q=1}^{m}\frac{\Delta_{jq}(\tilde{k},\omega)}{\Delta(\tilde{k},\omega)}f_{\tilde{k}q}\,,\quad j\in\{1,\dots,m\},$$

де $\Delta_{jq}(\tilde{k},\omega)$ − алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині q-го стовпця та j-го рядка у визначнику $\Delta(\tilde{k},\omega)$; при цьому справджуються оцінки

$$\left|\Delta_{jq}(\tilde{k},\omega)\right|\le C_1\left|\tilde{k}\right|^{2n(m-1)},\quad j,q\in\{1,\dots,m\},\quad \tilde{k}\in \text{K},\quad C_1=C_1(A_s,\tilde{k},\omega)>0. \qquad (6)$$

Визначник $\Delta(\tilde{k},\omega)$, будучи відмінним від нуля, може ставати як завгодно малим для нескінченної множини векторів $\tilde{k}$, $\tilde{k}\in$ K. Отже, питання про існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої використано метричний підхід та результати і методи метричної теорії чисел (див. [1, 2]).

Лема. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел ω нерівність $\left|\Delta(\tilde{k},\omega)\right|<h^{-pmn-\varepsilon}$ $\left|\Delta(\tilde{k},\omega)\right|<h^{-pmn-\varepsilon}$, де $h=\max_{j\in\{0,\dots,p\}}\{k_j\}$, $0<\varepsilon<1$, має не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_0,k_1,\dots,k_p,\tilde{k}\in$ K.

Із оцінок (6) і леми випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел ω нерівності

$$\left|\frac{\Delta_{jq}(\tilde{k},\omega)}{\Delta(\tilde{k},\omega)}\right|\le C_2|k|^{n[(p+2)m-2]+\varepsilon},\quad j,q\in\{1,\dots,m\},\quad C_2>0,\quad 0<\varepsilon<1,$$

справджуються для всіх (крім скінченої кількості) векторів $\tilde{k}$, $\tilde{k}\in$ K.

Теорема 2. Якщо $f\in\bar{C}^r(\bar{D})$, де $r=(p+2)(mn+1)$, причому $f_j^{(2(g-1))}(0,x)=0$, $f_j^{(2g-1)}(T,x)=0$, $j\in\{1,\dots,m\}$, $g\in\{1,\dots,n\}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел ω існує розв'язок $u(t,x)$ задачі (1), (2) із простору $\bar{C}^{2n}(\bar{D})$, компоненти якого зображають формули

$$u_j(t,x)=\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{|k|\ge 0}\sum_{q=1}^{m}\frac{\Delta_{jq}(\tilde{k},\omega)}{\Delta(\tilde{k},\omega)}f_{\tilde{k}q}\sin\big((k_0+1/2)\,\pi/T\,t\big)\exp(ik,x)\,,\quad j\in\{1,\dots,m\}.$$

Доведення проводиться за схемою доведення Теореми 3 в [3].

Робота виконана за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект № 41.1/ 004).

1. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — К.: Наук. думка, 1984. — 264 с.
2. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — К.: Наук. думка, 2002. — 416 с.
3. Берник В. И., Пташник Б. И. Краевая задача для системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. — 1980. — **16**, №2. — С. 273–279.