УДК 517.946

Задача з інтегральними умовами для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами

Кузь А. М., аспірант

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна)

В області $D=\left\{(t,x)\in\mathbf{R}^{p+1}:0<t<T,x\in\mathbf{R}^{p}\right\}$ розглянемо задачу про відшукання майже періодичного за x розв'язку рівняння

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_j(t)\Delta\right)u(t,x)=0,\quad (t,x)\in D, \tag{1}$$

що задовольняє умови

$$U_j[u]:=\alpha_j u(t_j,x)+\beta_j\int_0^T t^{r_j}u(t,x)dt=\varphi_j(x),\quad j\in\{1,\dots,n\},\quad x\in\mathbf{R}^p, \tag{2}$$

де $a_j(t)\in C^{n-j}([0,T])$, $a_j(t)>0$, $a_j(t)\neq a_q(t)$, $j\neq q$, $t\in[0,T]$; $\alpha_j,\beta_j\in\mathbf{R}$, $\alpha_j^2+\beta_j^2\neq 0$; $r_j\in\mathbf{Z}_+$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $r_q>r_s$, $q>s$; $0\le t_1<\ldots<t_n\le T$; $\Delta=\sum_{j=1}^{p}\partial^2\big/\partial x_j^2$; праві частини умов (2) є майже періодичними функціями зі заданим спектром $M_p:=\left\{\mu_k=(\mu_{k_1},\dots,\mu_{k_p}),k\in\mathbf{Z}^p\right\}$, $\mu_{-k}=-\mu_k$, $\varphi_j(x)=\sum_{\mu_k\in M_p}\varphi_{jk}\exp(i\mu_k,x)$, $j\in\{1,\dots,n\}$, причому існують додатні сталі d_1,d_2, σ_1,σ_2, $\sigma_1\le\sigma_2$, такі, що $d_1|k|^{\sigma_1}\le|\mu_k|\le d_2|k|^{\sigma_2}$, де $|k|=|k_1|+\dots+|k_p|$, $|\mu_k|=|\mu_{k_1}|+\dots+|\mu_{k_p}|$; $(\mu_k,x)=\mu_{k_1}x_1+\dots+\mu_{k_p}x_p$.

Майже періодичний за x розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду $u(t,x)=\sum_{\mu_k\in M_p}u_k(t)\exp(i\mu_k,x)$, де кожна з функцій $u_k(t)$ є розв'язком такої задачі:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}-a_j(t)\|\mu_k\|^2\right)u_k(t)=0,\quad U_j[u_k]:=\alpha_j u_k(t_j)+\beta_j\int_0^T t^{r_j}u_k(t)dt=\varphi_{jk},\quad j\in\{1,\dots,n\}, \tag{3}$$

де $\|\mu_k\|^2=\mu_{k_1}^2+\dots+\mu_{k_p}^2$. Позначимо: $\vec{t}=(t_1,\dots,t_n)$; $\{u_{kl}(t),l=1,\dots,n\}$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (3); $\Delta(\mu_k,\vec{t},T)=\det\left\|U_j[u_{kl}]\right\|_{l,j=1}^{n}$ – характеристичний визначник задачі (3); $W_B^{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, – простір функцій отриманий шляхом поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $v(x)=\sum_{|k|\le N}v_k\exp(i\mu_k,x)$ з комплексними коефіцієнтами за нормою $\left\|v;W_B^{\alpha,\beta}\right\|=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|v_k|^2(1+|\mu_k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|\mu_k|^2)\right)^{1/2}$; $C^n([0,T],W_B^{\alpha,\beta})$ – просторі функцій $u(t,x)$ таких, що для довільного фіксованого $t\in[0,T]$ похідні $d^ju(t,\cdot)/dt^j$, $j\in\{1,\dots,n\}$, належать простору $W_B^{\alpha,\beta}$ і є неперервними за $t\in[0,T]$ у нормі цього простору, $\left\|u;C^n([0,T],W_B^{\alpha,\beta})\right\|=\sum_{j=0}^{n}\left\|d^ju(t,\cdot)/dt^j;W_B^{\alpha,\beta}\right\|$.

Теорема 1. *Для того, щоб задача (1), (2) мала не більше одного майже періодичного за x із спектром M_p розв'язку у просторі $W_B^{\alpha,\beta}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall \mu_k \in M_p \quad \Delta(\mu_k, \vec{t}, T) \neq 0. \tag{4}$$

З а у в а ж е н н я. Якщо в умовах (2) $\alpha_j = 0,\ j \in \{1,\dots,n\}$, то умова (4) виконується для довільних T та $\vec{t}$.

За умови теореми 1 для кожного $\mu_k \in M_p$ існує єдиний розв'язок задачі (3), а формальний розв'язок задачі (1), (2) зображується у вигляді ряду

$$u(t,x) = u_{\bar{0}}(t) + \sum_{\mu_k \in M_p \setminus \{\bar{0}\}} \left(\sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)}{\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)} \varphi_{lk} u_{jk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x), \tag{5}$$

де $u_{\bar{0}}(t) = \sum_{l,j=1}^{n} \Delta_{lj}\left(\vec{0}, \vec{t}, T\right) \Delta^{-1}\left(\vec{0}, \vec{t}, T\right) \varphi_{l,\bar{0}} t^{j-1}$, $\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)$ – алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ елемента l–ого рядка та j–ого стовпця.

Питання існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане з проблемою малих знаменників [1], бо вираз $\left|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)\right|$ будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in M_p$.

Позначимо:

$$A_1 = \min_{1 \le j \le n} \left\{ \min_{t \in [0,T]} \int_0^T a_j(t) dt \right\},\ A_2 = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \max_{t \in [0,T]} \int_0^T \left(a_j(t) - a_{j+1}(t) \right) dt \right\},\ A_3 = \max\{0, A_2\}.$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова (5) та існують додатні сталі η, ν такі, що для всіх (крім скінченної кількості) $\mu_k \in M_p$ виконується нерівність*

$$\left|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)\right| > \left(1 + |\mu_k|\right)^{-\eta} \exp(-\nu |\mu_k|^2) \tag{6}$$

Якщо $\varphi_j(x) \in W_{|B}^{q_1,q_2},\ q_1 = \eta + 2n + \alpha,\ q_2 = \nu + n(n-1)A_3/2 - nA_1 + \beta,\quad j \in \{1,\dots,n\}$, *то існує розв'язок задачі (1), (2) із простору* $C^n([0,T], W_B^{\alpha,\beta})$ *який зображується рядом (5) та неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x),\ j \in \{1,\dots,n\}$.

Про можливість виконання нерівності (6) для частинного випадку задачі (1), (2) стверджує така теорема.

Теорема 3. *Нехай в умовах (2)* $\alpha_j \neq 0,\ j \in \{1,\dots,n\}$, *та* $t_n \neq T$. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbf{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0,T]^n$ *оцінка (6) виконується для всіх (крім скінченої кількості) векторів* $\mu_k \in M_p$ *коли* $\eta > (n(n-1)+2)/(2\sigma_1)$, $\nu > (n^2 + n(2\sigma_1 - 1) + 2)A_5/(2\sigma_1)$, *де* $A_5 = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \max_{t \in [0,T]} \{a_j(t)\} \right\}$.

Робота підтримана ДФФД України (проект №41.1/004).

1. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.