УДК 519.3

Побудова вкладеної мінімальної поверхні

Крупка З. І., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ
Олексів І. Я., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Нехай B, $IntB$, ∂B – відповідно замкнений круг $u^2 + v^2 \le 1$, його внутрішність і границя, R^3 – тривимірний евклідів простір, Γ – проста замкнена крива в R^3. Неперервне відображення $f : B \to R^3$, звуження якого $f \mid \partial B$ є монотонним відображенням кола ∂B на криву Γ, називається поверхнею з краєм Γ. Поверхня $f : B \to R^3$ називається мінімальною, якщо $f \mid IntB$ – регулярне відображення класу C^2, середня кривина якого дорівнює нулю в кожній точці. Задача Плато для простої замкненої кривої Γ в R^3 полягає в тому, щоб побудувати мінімальну поверхню з краєм Γ, яка має найменшу площу Лебега серед усіх поверхонь з тим самим краєм. У повідомленні сформульовано умови за яких розв'язок задачі Плато для кривої Γ є вкладенням $f : B \to R^3$.

Теорема. Якщо M – компактна опукла множина в R^3, і Γ – проста замкнена крива скінченної довжини на границі ∂M, то існує вкладений розв'язок задачі Плато з краєм Γ.

Доведення теореми можна звести до розгляду трьох випадків.

Випадок 1. Крива Γ є простою замкненою ламаною розташованою на границі опуклого многогранника M. Точні нижні межі площ поверхонь з краєм Γ і площ поліедральних поверхонь з краєм Γ однакові, нехай їх спільне значення – $m(\Gamma)$. Для ламаної Γ у цьому випадку існує вкладення $f : B \to R^3$, яке є розв'язком задачі Плато. Цей розв'язок можна отримати як границю послідовності кусково-лінійних вкладень $g_n : B \to R^3$, які рівномірно збігаються до f, і площі яких збігаються до $m(\Gamma)$.

Випадок 2. Проста замкнена крива Γ має скінченнну довжину і розташована на границі ∂M опуклого многогранника M. У цьому випадку криву Γ можна наблизити послідовністю простих замкнених ламаних Γ_n, що розташовані на границі ∂M, мають рівномірно обмежені довжини і збігаються в до кривої Γ. За тих умов $\lim_{n\to\infty} m(\Gamma_n) = m(\Gamma)$. Тоді відомо, що вкладений розв'язок задачі Плато для кривої Γ можна отримати на основі розв'язків задач Плато для ламаних Γ_n.

Випадок 3. Якщо Γ – проста замкнена крива, про яку йдеться в теоремі, то для опуклої множини M побудуємо послідовність опуклих многогранників $\{M_n\}$, які стягуються до множини M. Виберемо всередині M довільну точку O і позначимо Γ_n – образ при відображенні центрального проектування p_n з точки O кривої Γ на границю многогранника M_n. Легко переконатися в тому, що всі відображення $p_n \mid \partial M$ задовольняють умову Ліпшиця з рівномірно обмеженими сталими Ліпшиця. Тому довжини кривих Γ_n рівномірно обмежені зверху і $\lim_{n\to\infty} m(\Gamma_n) = m(\Gamma)$. Оскільки для кожної кривої Γ_n існує вкладений розв'язок задачі Плато, то вкладений розв'язок задачі Плато існує також і для кривої Γ.