УДК 539.3

# Побудова методом Фур'є числових розв'язків задачі деформування ізотропної пластини з включенням

**Зашкільняк І. М.**, к.т.н., ст. викл. каф. ВМ
**Сухорольський М. А.**, д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ
**Тимошенко Н. М.**, к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ
**Томецька С. І.**, к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

У роботі [1] для формулювання інтегральних рівнянь та побудови числових розв'язки задач теорії пружності використано математичний апарат розвинення функцій в узагальнені ряди Фур'є за тригонометричними системами функцій. У даній роботі розглянуто схему побудови числового розв'язку задачі для ізотропної пластини з впаяним абсолютно жорстким включенням. Напруження, що виникають у пластині, є функціями двох координат. Позначимо через $S = \{\xi(x,y) : 0<x<l_1;\ 0<y<l_2\}$ область, в якій визначені функції, що задають пружний стан пластини, і $L$ - лінія контакту включення і пластини, параметричне рівняння якої

$$x = \varphi(\vartheta), \quad y = \psi(\vartheta), \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi. \tag{1}$$

Рівняння нормальної прямої в точці $\xi(x,y) \in L$ наступне

$$x_r = n_1 r + x, \quad y_r = n_2 r + y, \quad -\infty < r < \infty, \tag{2}$$

де $\{n_1; n_2\}$ – одиничний нормальний вектор до $L$.

Рівняння, що описують пружний стан пластини, межові умови на краях пластини і лінії контакту мають вигляд [2]

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = -p_1, \quad \frac{\partial N_{21}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} = -p_2, \quad N_{11} = B\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial y}\right),$$
$$N_{22} = B\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x}\right), \quad N_{12} = N_{21} = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right), \quad \xi \in S; \tag{3}$$

$$u_2(\xi)\big|_{x=0} = 0, \quad u_2(\xi)\big|_{x=l_1} = 0, \quad u_1(\xi)\big|_{y=0} = 0, \quad u_1(\xi)\big|_{y=l_2} = 0,$$
$$N_{11}(\xi)\big|_{x=0} = 0, \quad N_{11}(\xi)\big|_{x=l_1} = 0, \quad N_{22}(\xi)\big|_{y=0} = 0, \quad N_{22}(\xi)\big|_{y=l_2} = 0; \tag{4}$$

$$u_1(\xi)\big|_{\xi\in L} = 0, \quad u_2(\xi)\big|_{\xi\in L} = 0, \quad \xi \in S. \tag{5}$$

Спочатку шукаємо сингулярний розв'язок задачі (3), (4). Задаємо інтенсивність зовнішніх сил у вигляді узагальнених сум тригонометричних рядів

$$p_1 = P_1(\xi_0)\delta(x_0,x)\delta(y_0,y) = P_1(\xi_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{l_1 l_2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^{cs}(\xi_0)\Phi_{km}^{cs}(\xi),$$
$$p_2 = P_2(\xi_0)\delta(x_0,x)\delta(y_0,y) = P_2(\xi_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{l_1 l_2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^{sc}(\xi_0)\Phi_{km}^{sc}(\xi), \tag{6}$$

де $\Phi_{km}^{ss}(\xi) = \sin\lambda_{1k}x\sin\lambda_{2m}y$ ; $\Phi_{km}^{cs}(x,y) = \cos\lambda_{1k}x\sin\lambda_{2m}y$ ; $\Phi_{km}^{sc}(\xi) = \sin\lambda_{1k}x\cos\lambda_{2m}y$ ; $\Phi_{km}^{cc}(\xi) = \cos\lambda_{1k}x\cos\lambda_{2m}y$ ; $\lambda_{1k} = k\pi/l_1$ ; $\lambda_{2m} = m\pi/l_2$ ; $c_{km}(\varepsilon) = \varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)/2$ , якщо $k \ge 1, m = 0$ , $c_{km}(\varepsilon) = \varphi(\lambda_{2m}\varepsilon)/2$ , якщо $k = 0, m \ge 1$ , $c_{km}(\varepsilon) = \varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)\varphi(\lambda_{2m}\varepsilon)$ , якщо $k \ge 1, m \ge 1$ ; $\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon),\ \varphi(\lambda_{2m}\varepsilon)$ - підсумовуючі послідовності [1].

Розв'язок системи рівнянь (3), що справджує умови (4), одержимо з урахуванням (6) також у вигляді узагальнених сум рядів

$$\overline{U}_i(\xi_0,\xi)=U_i^1(\xi_0,\xi)\frac{P_1(\xi_0)}{B}+U_i^2(\xi_0,\xi)\frac{P_2(\xi_0)}{B},\ i=1,2, \qquad (7)$$

де $\Delta_{km}^2=\lambda_{1k}^2+\lambda_{2m}^2$; $U_1^1(\xi_0,\xi)=\frac{4}{l_1l_2}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{km}(\varepsilon)}{\Delta_{km}^4}\left(\lambda_{1k}^2+\frac{2}{1-\nu}\lambda_{2m}^2\right)\Phi_{km}^{cs}(\xi_0)\Phi_{km}^{cs}(\xi)$;

$$U_1^2(\xi_0,\xi)=-\frac{4}{l_1l_2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{km}(\varepsilon)\lambda_{1k}\lambda_{2m}}{\Delta_{km}^4}\Phi_{km}^{sc}(\xi_0)\Phi_{km}^{cs}(\xi);$$

$$U_2^1(\xi_0,\xi)=-\frac{4}{l_1l_2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_{km}(\varepsilon)\lambda_{1k}\lambda_{2m}}{\Delta_{km}^4}\Phi_{km}^{cs}(\xi_0)\Phi_{km}^{sc}(\xi);$$

$$U_2^2(\xi_0,\zeta)=\frac{4}{l_1l_2}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\Delta_{km}^4}\left(\lambda_{2m}^2+\frac{2}{1-\nu}\lambda_{1k}^2\right)\Phi_{km}^{sc}(\xi_0)\Phi_{km}^{sc}(\xi).$$

Використаємо тепер співвідношення (7) для зображення розв'язку задачі про нагрів і навантаження пластини розподіленими вздовж лінії $L$ «фіктивними» зусиллями інтенсивності $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$. Підставляючи одержані інтегральні розв'язки цієї задачі в умови (5), прийдемо до такої системи інтегральних рівнянь

$$\lim_{r\to -0}\int_L U_1^1(\xi_0,\xi_r)P_i^*(\xi_0)\,dl(\xi_0)+\lim_{r\to -0}\int_L U_i^2(\xi_0,\xi_r)P_2^*(\xi_0)\,dl(\xi_0)=U_i(\xi).\ i=1,2,\ \xi\in L, \qquad (8)$$

де $P_1^*(\xi_0)=\frac{P_1(\xi_0)}{B}$; $P_2^*(\xi_0)=\frac{P_2(\xi_0)}{B}$.

Числова схема розв'язування системи інтегральних рівнянь (8) ґрунтується на ідеї методу колокації [1]. В результаті цих перетворень прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно послідовності $3n$ невідомих

$$\sum_{i=1}^{n}U_{lN}^1(\xi_{0i},\xi_{jr})\Delta l_i\,P_{1i}^*+\sum_{i=1}^{n}U_{lN}^2(\xi_{0i},\xi_{jr})\Delta l_i\,P_{2i}^*=U_l(\xi_{jr}),\ l=1,2,\ j=\overline{1,n}, \qquad (9)$$

де $U_{1N}^1(\xi_{0i},\xi_{jr})=\frac{4}{l_1l_2}\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{c_{km}(\varepsilon_N)}{\Delta_{km}^4}\left(\lambda_{1k}^2+\frac{2}{1-\nu}\lambda_{2m}^2\right)\Phi_{km}^{cs}(\xi_{0i})\Phi_{km}^{cs}(\xi_{jr})$;

$$U_{1N}^2(\xi_{0i},\xi_{jr})=-\frac{4}{l_1l_2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{c_{km}(\varepsilon_N)\lambda_{1k}\lambda_{2m}}{\Delta_{km}^4}\Phi_{km}^{sc}(\xi_{0i})\Phi_{km}^{cs}(\xi_{jr});$$

$$U_{2N}^1(\xi_{0i},\xi_{jr})=-\frac{4}{l_1l_2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_{km}(\varepsilon_N)\lambda_{1k}\lambda_{2m}}{\Delta_{km}^4}\Phi_{km}^{cs}(\xi_{0i})\Phi_{km}^{sc}(\xi_{jr});$$

$$U_{2N}^2(\xi_{0i},\xi_{jr})=\frac{4}{l_1l_2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{\Delta_{km}^4}\left(\lambda_{2m}^2+\frac{2}{1-\nu}\lambda_{1k}^2\right)\Phi_{km}^{sc}(\xi_{0i})\Phi_{km}^{sc}(\xi_{jr});$$

$\xi_{0i}(x_{0i},y_{0i})$, $\xi_{jr}(x_{jr},y_{jr})$ - точки, координати яких визначаємо за формулами (1) і (2).

Для функцій, що визначають термопружний стан пластини у будь-якій її точці, одержимо з (3) аналогічні (9) дискретні подання.


1. Бурак Я. Й. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. / Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. Ф. - Львів: Інтелект-Захід, 2007. – 240 с.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. – 308 с.