

УДК 539.37

## Аналіз деформування в'язкопружного шару під дією нормального навантаження на базі двопараметричної моделі

Скородинський І. С., інженер-програміст I кат.

Максимук О. В., д.ф.-м.н., проф., пр.н.с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України  
(вул. Наукова, 3<sup>б</sup>, м. Львів, 79060, Україна)

Нехай маємо в'язкопружний ізотропний шар товщини  $2h$ , що лежить на жорсткій основі. Матеріал шару описується моделлю Кельвіна–Фойгта. На шар діє розподілене нормальне навантаження, що залежить від часу. Задачу розглядаємо в рамках плоскої деформації.

Диференціальне рівняння для визначення вертикального переміщення  $v$  навантаженої поверхні має вигляд [1]

$$2t_e v'' + 2t_\eta \dot{v}'' - k_e v - k_\eta \dot{v} = p(x, t), \quad (1)$$

де  $t_e, \dots, k_\eta$  – комбінації в'язкопружних сталей та товщини матеріалу шару;  $p(x, t)$  – інтенсивність нормального розподіленого навантаження; штрихами позначено похідні по координаті  $x$ , а крапками – по часу. Крайова та початкова умови мають вигляд

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x, t) = 0; \quad (2)$$

$$v(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Розглянемо випадок зосередженої сили, що діє в початку координат, тобто  $p(x, t) = P(t)\delta(x)$  ( $\delta(x)$  –  $\delta$ -функція Дірака). Застосовуючи до рівняння (1) інтегральні перетворення Фур'є по  $x$  та Лапласа по  $t$  і враховуючи умови (2), (3), отримаємо розв'язок задачі у вигляді

$$v(x, t) = -\int_0^t G(x, t - \tau) P(\tau) d\tau, \quad (4)$$

де

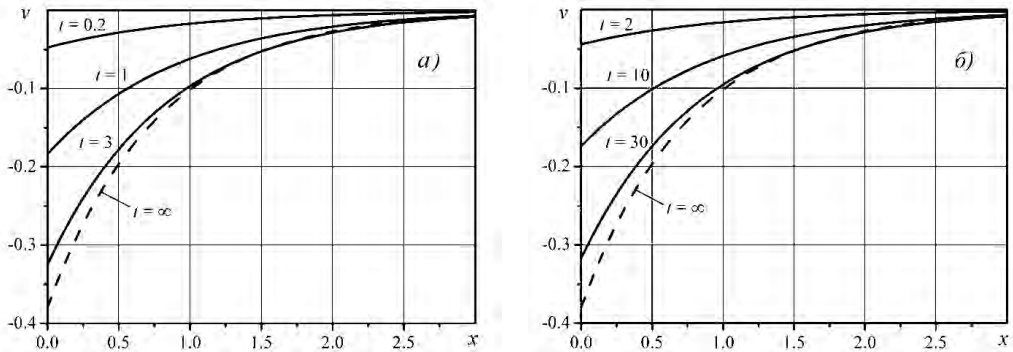
$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi t_\eta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha_e^2}{\xi^2 + h^{-2}}\right) \frac{\cos x\xi}{\xi^2 + h^{-2}} d\xi \quad (5)$$

є функцією Гріна. У формулі (5)  $\tau_K$  – час запізнення;  $\alpha_e^2 = k_e / (2t_e)$ .

Для випадку сталої в часі зосередженої сили  $P(t) = P_0 H(t)$  ( $H(t)$  – функція Хевісайда) введемо безрозмірні координату  $\bar{x} = x/h$ , час  $\bar{t} = t/\tau_0$  ( $\tau_0$  – характерний час), а також безрозмірний час запізнення  $\bar{\tau}_K = \tau_K/\tau_0$  та вертикальне переміщення  $\bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = 2t_e v(x, t)/(hP_0)$ . Тоді, опускаючи верхні риси, отримаємо наступний вираз для безрозмірного вертикального переміщення:

$$v(x, t) = -\frac{e^{-\alpha|x|}}{2\alpha} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + \xi^2}{1 + \xi^2}\right) \frac{\cos x\xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi. \quad (6)$$

Тут  $\alpha = h\alpha_e$ .



**Рис. 1** Графіки залежності безрозмірного вертикального переміщення від безрозмірної координати (*a* –  $\eta = 5 \text{ ГПа} \cdot \text{с}$ ,  $\tau_K = 19.65 \text{ с}$ ; *б* –  $\eta = 54 \text{ ГПа} \cdot \text{с}$ ,  $\tau_K = 212.2 \text{ с}$ )

На Рис. 1 приведено графіки залежності безрозмірного вертикального переміщення від безрозмірної координати в різні моменти часу, отримані з допомогою формули (6) для двох значень в'язкості матеріалу шару  $\eta$  (часу запізнення  $\tau_K$ ). Пружні сталі матеріалу в'язкопружного шару наступні:  $E = 570 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0.12$ . Характерний час в обох випадках  $\tau_0 = 10 \text{ с}$ . Як видно з Рис. 1, в'язкопружні вертикальні переміщення в точках, близьких до точки прикладання зосередженої сили, завжди по модулю менші від пружних (штрихові лінії на Рис. 1 *a, б*), а значить є скінченними в цій точці. При  $t \rightarrow \infty$  в'язкопружний розв'язок наближається до пружного, причому при  $t > \tau_K$  для точок, віддалених від точки прикладання навантаження на величину, більшу від  $h$ , різниця між відповідними розв'язками стає незначною. Збільшення в'язкості матеріалу шару приблизно на порядок призводить приблизно до такого ж збільшення запізнення реакції в'язкопружного шару на зовнішню силову дію. Таким чином, у в'язкопружному шарі, що описується моделлю Кельвіна–Фойгта, за нульової початкової умови в'язкопружні деформації (переміщення) розвиваються не миттєво, як у пружному шарі, а з певним запізненням, що залежить від часу запізнення  $\tau_K$ . Тому якщо необхідно уникнути деформацій, близьких до пружних (в околі точки прикладання зосередженої сили), час дії навантаження повинен бути невеликим (принаймні меншим від  $\tau_K$ ).

Побудовано графіки зміни в часі відносної різниці між в'язкопружним та пружним розв'язками в точці прикладання зосередженої сили для різних значень в'язкопружних сталей матеріалу шару. Крім цього, встановлено пропорційність між часом запізнення реакції шару на зовнішню силову дію та часом запізнення  $\tau_K$ , а також монотонно спадну залежність коефіцієнта пропорційності у цьому співвідношенні від відстані між в'язкопружним та пружним розв'язками та його слабку залежність від коефіцієнта Пуассона матеріалу шару.

Таким чином, на базі узагальненої двопараметричної моделі проведено детальний аналіз деформування в'язкопружного шару на жорсткій основі під дією нормальної зосередженої сили та встановлено основні закономірності цього процесу.

1. Скородинский И.С., Максимук А.В. Обобщенная двухпараметрическая модель термовязкоупругого промежуточного слоя или покрытия // Теоретическая и прикладная механика. — 2011. — Вып. 3(49). — С. 59–69.