

УДК 517.95

Про одну обернену задачу для рівняння теплопровідності в області з вільною межею

Пабіривська Н. В., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

В даній роботі вивчається обернена задача визначення старшого коефіцієнта та множника у вільному члені рівняння теплопровідності, яке розглядається в області з невідомою вільною межею. Поставлена задача зводиться до оберненої задачі для виродженого параболічного рівняння, а також досліджуються умови розв'язності даної задачі.

Отже, в області $Q_T = \{(x, t): 0 < x < th(t), 0 < t < T\}$ розглядається задача визначення четвірки функцій $(h(t), a(t), f(t), u(x, t))$, $a(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0, T]$, які задовольняють рівняння теплопровідності:

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(t)g(x), \quad (1)$$

і умови:

$$u(0, t) = v_1(t), \quad u(th(t), t) = v_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$a(t)u_x(0, t) = v_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\int_0^{th(t)} u(x, t) dx = v_4(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$\int_0^{th(t)} xu(x, t) dx = v_5(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

Шляхом заміни $y = \frac{x}{h(t)}$ обернена задача (1)–(5) в області з невідомою вільною межею зводиться до такої оберненої задачі:

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{yh'(t)}{h(t)} v_y + f(t)\tilde{g}(y), \quad (y, t) \in \Omega_T,$$

$$v(0, t) = v_1(t), \quad v(t, t) = v_2(t), \quad t \in [0, T],$$

$$a(t)v_y(0, t) = v_3(t)h(t), \quad t \in [0, T],$$

$$h(t) \int_0^t v(y, t) dy = v_4(t), \quad t \in [0, T],$$

$$h^2(t) \int_0^t yv(y, t) dy = v_5(t), \quad t \in [0, T],$$

де $\Omega_T = \{(y, t): 0 < y < t, 0 < t < T\}$, $v(y, t) = u(y \cdot h(t), t)$, $\tilde{g}(y) = g(y \cdot h(t))$.

Отримана задача еквівалентна системі інтегро-диференціальних рівнянь, існування розв'язку якої встановлюється за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Єдиність розв'язку досліджується окремо з використанням теорії однорідних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду з ядрами, що мають слабку особливість.

1. І. Баранська. Обернена задача для параболічного рівняння з вільною межею. — Львів: Мат. методи і фіз.-мех. поля, 2005, т.36, — С.32-42.
2. Іванчов М., Салдіна Н. Обернена задача для сильно виродженого параболічного рівняння. — Укр. мат. журнал, 2006, т.58, — С.1487-1500.