

Ю.М. Романишин

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра електронних засобів інформаційно-  
комп’ютерних технологій

## МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ФУНКЦІОНУВАННЯ РЕКУРЕНТНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

*О Романишин Ю.М., 2008*

**Розглянуто окремі питання, пов’язані з математичним забезпеченням функціонування рекурентних нейронних мереж, – критерії локальної стійкості точок рівноваги, встановлення стійкості на основі функції Ляпунова, визначення стійкості при використанні умови Ліпшиця, отримання автоколивальних процесів, синхронізація процесів. Наведено приклади динаміки рекурентних нейронних мереж.**

**There are represented some questions concerning mathematical means of recurrent neural networks functioning – criteria of local stability of equilibrium points, ascertainment of stability on basis of Lyapunov function, determination of stability by use of Lipschitz condition, receiving of autooscillations, synchronization of processes. Examples of dynamics of recurrent neural networks are given.**

### Постановка проблеми

Рекурентні нейронні мережі є одним з найважливіших класів штучних нейронних мереж. Їх важливість полягає як в можливостях їх використання як систем асоціативної пам’яті, розпізнавання образів та сигналів, класифікації об’єктів, так і в їх використанні при моделюванні біонейронних структур, більшість з яких є системами зі зворотними зв’язками, що адекватно відображаються рекурентними нейронними мережами. Для рекурентних нейронних мереж важливими є задачі дослідження динамічних характеристик при їх функціонуванні за заданими початковими значеннями змінних нейронної мережі – перетворення вхідного сигналу в еталонний сигнал, що визначається параметрами нейронної мережі, визначеними в процесі її навчання. Динамічні процеси в рекурентних нейронних мережах зазвичай описуються відповідними системами нелінійних диференціальних рівнянь, їх характер відзначається різноманітністю можливих процесів та їх характеристик: збіжність до певних точок рівноваги; розбіжність; локальний чи глобальний характер цих процесів; автоколивальні процеси; швидкість збіжності динамічних процесів (наприклад, експоненційна збіжність); кількість точок рівноваги; наявність “паразитних” точок рівноваги тощо. Теоретичні основи цих задач становлять математичне забезпечення функціонування рекурентних нейронних мереж.

### Аналіз останніх досліджень

Теорія рекурентних нейронних мереж розвивалася з самого початку зародження теорії штучних нейронних мереж. Крім того, багато теоретичних питань теорії динамічних систем знайшли застосування в рекурентних нейронних мережах. Одним з фундаментальних математичних результатів, на якому ґрунтується теорія неперервних рекурентних мереж, зокрема нейронних мереж Хопфілда, є теорема Коена–Гроссберга [1], яка визначає умови стійкості певного класу нейронних мереж, що описуються загальною системою нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Теорія рекурентних нейронних мереж знаходить своє відображення практично в кожній з монографій чи навчальних посібників, що опубліковані протягом останніх років

(наприклад, [2–4]), у багатьох статтях, зокрема в мережі Інтернет (наприклад, [5–8]). Однак, незважаючи на десятки років розвитку теорії рекурентних нейронних мереж, частина наведених задач не отримала свого розв’язання в загальній формі, особливості процесів залежать від багатьох факторів, зокрема, виду нелінійностей, окремі задачі розв’язані лише для нейронних мереж з невеликою кількістю нейронів, зокрема, з двома. Все це обумовлює актуальність подальшого розвитку математичного та програмного забезпечення динаміки рекурентних нейронних мереж.

### Мета статті

Метою статті є аналіз деяких особливостей, пов’язаних з математичним забезпеченням функціонування рекурентних нейронних мереж, - встановлення локальної стійкості точок рівноваги, стійкості на основі функції Ляпунова, визначення стійкості при використанні умови Ліпшиця, отримання автоколивальних процесів, синхронізація процесів.

### Локальна стійкість точок рівноваги рекурентних нейронних мереж

Найбільш ранні результати дослідження локальної стійкості точок рівноваги рекурентних нейронних мереж ґрунтуються на лінеаризації нелінійних складових систем диференціальних рівнянь, побудові відповідного характеристичного рівняння, дослідженні його коренів і аналізі впливу зміни параметрів нейронної мережі на характеристики стійкості. У [9] досліджено умови локальної стійкості та виникнення біфуркацій для моделей рекурентних нейронних мереж з двома затримками. Як правило, провести достатньо повне дослідження умов стійкості, та й то лише локальної, вдається лише для нейронних мереж певного класу, причому з обмеженою кількістю нейронів, зокрема, при  $n = 2$ . Оскільки в моделях реальних біонейронних структур необхідно враховувати часові затримки в дендритах та аксонах нейронів, в моделі нейронних мереж вводять відповідні затримки.

Рекурентна нейронна мережа, для якої проведений достатньо повний аналіз локальної стійкості, описується системою двох диференціальних рівнянь з двома різними затримками:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + a_{11}f(x_1(t-t_1)) + a_{12}f(x_2(t-t_2)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + a_{21}f(x_1(t-t_1)) + a_{22}f(x_2(t-t_2)) \end{cases}, \quad (1)$$

де  $a_{ij}$  – коефіцієнти зв’язків між нейронами;  $f$  – функції активації нейронів, які вважаються однаковими для обох нейронів.

При цьому вважається, що функції активації нейронів задовольняють умови:

- 1)  $f \in C'(R)$ , тобто функція  $f$  є неперервно диференційованою;
- 2)  $f(0) = 0$ ;
- 3)  $xf'(x) > 0$  при  $x \neq 0$ .

Очевидно, що точка  $(0;0)$  є точкою рівноваги системи рівнянь (1). Лінеаризація системи диференціальних рівнянь (1) у точці  $(0; 0)$  приводить до системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + a_{11}f'(0)x_1(t-t_1) + a_{12}f'(0)x_2(t-t_2) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + a_{21}f'(0)x_1(t-t_1) + a_{22}f'(0)x_2(t-t_2) \end{cases}. \quad (2)$$

Характеристичне рівняння для системи (2) має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 + 1 - a_{11}e^{-lt_1} & -a_{12}e^{-lt_2} \\ -a_{21}e^{-lt_1} & 1 + 1 - a_{22}e^{-lt_2} \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

де  $a_{ij} = a_{ij}f'(0)$ .

Це характеристичне рівняння визначає локальну стійкість точки рівноваги: вона є стійкою тоді і тільки тоді, коли всі корені характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини. З рівняння (3) отримуємо:

$$(I+1)^2 - (I+1)(a_{11}e^{-It_1} + a_{22}e^{-It_2}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e^{-I(t_1+t_2)} = 0. \quad (4)$$

За відсутності затримок ( $t_1 = t_2 = 0$ ) характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$(I+1)^2 - (I+1)(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (5)$$

Корені цього рівняння:

$$I_{1,2} = -1 + P \pm \sqrt{P^2 - \det\|a\|}, \quad (6)$$

де  $P = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$ ;  $\det\|a\| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

При  $P^2 - \det\|a\| \geq 0$  обидва корені характеристичного рівняння дійсні, умова локальної стійкості визначається співвідношенням (для кореня зі знаком “-” умова від'ємності кореня буде виконуватися тим більше):

$$P + \sqrt{P^2 - \det\|a\|} < 1. \quad (7)$$

При  $P^2 - \det\|a\| < 0$  корені комплексно спряжені, умовою локальної стійкості є  $P < 1$ .

І в більш загальних випадках  $t_1 = t_2 \neq 0$  та  $t_1 \neq t_2$  можна встановити області, в яких забезпечується локальна стійкість точок рівноваги або підтримуються автоколивальні процеси. Однак ці результати встановлюють критерії лише локальної стійкості, та й то для системи рівнянь простого вигляду і з двома нейронами.

**Встановлення стійкості точок рівноваги на основі функції Ляпунова.** Функція Ляпунова (якщо вдається її побудувати) доводить стійкість точки рівноваги в динамічній системі, що описується автономним диференціальним рівнянням, зокрема, що описує динаміку рекурентної нейронної мережі. Вона може бути використана для встановлення як локальної, так і глобальної стійкості динамічної системи. При цьому вона повинна бути додатно визначеною, а її похідна за часом від'ємно визначеною.

Однією з найпоширеніших та достатньо загальних моделей рекурентних нейронних мереж, для яких може бути побудована функція Ляпунова, є відома модель Коена-Гроссберга [1], яка описується такою системою нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_i) \left[ b_i(x_i) - \sum_{k=1}^n c_{ik} d_k(x_k) \right], \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

де  $n \geq 2$  – кількість нейронів в мережі;  $x_i(t)$  – змінні стану, пов'язані з  $i$ -м нейроном;  $t$  – час;  $a_i(x_i)$  – задані функції, обернені до яких можна інтерпретувати як параметри часу;  $b_i(x_i)$  – функції зміщення;  $d_k(x_k)$  – функції активації нейронів;  $c_{ik}$  – коефіцієнти зв'язків між нейронами.

При використанні функції Ляпунова для дослідження стійкості точок рівноваги моделі нейрона цю функцію для системи диференціальних рівнянь (8) подають у вигляді [1]:

$$V(\bar{x}(t)) = - \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} b_i(x_i) d'_i(x_i) dx_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} d_j(x_j) d_k(x_k). \quad (9)$$

Визначимо похідну  $V(\bar{x}(t))$  за часом. Використовуючи формулу диференціювання інтеграла:

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \quad \Rightarrow \quad I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y) dx + b'(y) f(b(y), y) - a'(y) f(a(y), y), \quad (10)$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} = & -\sum_{i=1}^n \left[ \frac{dx_i}{dt} b_i(x_i) d'_i(x_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[ c_{jk} d'_j(x_j) \frac{dx_j}{dt} d_k(x_k) + \right. \\ & \left. + c_{jk} d_j(x_j) d'_k(x_k) \frac{dx_k}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Підставляючи до цього виразу значення для  $\frac{dx_i}{dt}$  з (8) з заміною індекса підсумовування з  $k$  на  $m$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} = & -\sum_{i=1}^n \left\{ a_i(x_i) \left[ b_i(x_i) - \sum_{k=1}^n c_{ik} d_k(x_k) \right] b_i(x_i) d'_i(x_i) \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left\{ c_{jk} d'_j(x_j) a_j(x_j) \left[ b_j(x_j) - \sum_{m=1}^n c_{jm} d_m(x_m) \right] d_k(x_k) + \right. \\ & \left. + c_{jk} d_j(x_j) d'_k(x_k) a_k(x_k) \left[ b_k(x_k) - \sum_{m=1}^n c_{km} d_m(x_m) \right] \right\} = -\sum_{i=1}^n a_i(x_i) b_i^2(x_i) d'_i(x_i) + \\ & + \sum_{i=1}^n a_i(x_i) \sum_{k=1}^n c_{ik} d_k(x_k) b_i(x_i) d'_i(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} d'_j(x_j) a_j(x_j) b_j(x_j) d_k(x_k) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} d'_j(x_j) a_j(x_j) \sum_{m=1}^n c_{jm} d_m(x_m) d_k(x_k) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} d_j(x_j) d'_k(x_k) a_k(x_k) b_k(x_k) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} d_j(x_j) d'_k(x_k) a_k(x_k) \sum_{m=1}^n c_{km} d_m(x_m). \end{aligned} \quad (12)$$

У 5-му доданку виразу (12) замінимо індекси  $j$  на  $k$  і навпаки та змінимо порядок підсумовування. У результаті для симетричної матриці  $\|c\|$  ( $c_{jk} = c_{kj}$ ) цей доданок збігається з 3-м доданком. Крім того, ці доданки в сумі збігаються з 2-м доданком при заміні індекса  $j$  на  $i$ . Отже, 2-й, 3-й та 5-й доданки у сумі дорівнюватимуть:

$$2 \sum_{i=1}^n a_i(x_i) \sum_{k=1}^n c_{ik} d_k(x_k) b_i(x_i) d'_i(x_i). \quad (13)$$

Аналогічно при симетрії матриці  $\|c\|$  4-й та 6-й доданки будуть однаковими, і їх сума дорівнюватиме (при заміні індекса  $j$  на  $i$ ):

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} d'_i(x_i) a_i(x_i) \sum_{m=1}^n c_{im} d_m(x_m) d_k(x_k). \quad (14)$$

У результаті отримуємо вираз:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} = & -\sum_{i=1}^n a_i(x_i) b_i^2(x_i) d'_i(x_i) + 2 \sum_{i=1}^n a_i(x_i) \sum_{k=1}^n c_{ik} d_k(x_k) b_i(x_i) d'_i(x_i) - \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} d'_i(x_i) a_i(x_i) \sum_{m=1}^n c_{im} d_m(x_m) d_k(x_k) = -\sum_{i=1}^n a_i(x_i) d'_i(x_i) \left[ b_i(x_i) - \sum_{k=1}^n c_{ik} d_k(x_k) \right]^2. \end{aligned} \quad (15)$$

З цього виразу видно, що при використаній симетрії матриці  $\|c\|$ , а також при всіх значеннях  $a_i(x_i)d'_i(x_i) \geq 0$ , значення виразу  $\frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} \leq 0$ . Отже, достатніми умовами того, що наведений вираз (9) є функцією Ляпунова для системи диференціальних рівнянь (8), є:

1) матриця зв'язків  $\|c\|$  симетрична;

2) значення  $a_i(x_i)d'_i(x_i) \geq 0$ .

Зазвичай як функції активації  $d_i(x_i)$  використовують монотонно зростаючі функції, для яких  $d'_i(x_i) > 0$ . У результаті умовою стійкості точок рівноваги є  $a_i(x_i) \geq 0$ .

Відповідно до першої теореми Ляпунова це забезпечує глобальну стійкість точок рівноваги для нейронних мереж, які задовольняють умови теореми Коена–Гроссберга. Зокрема, це справедливо для нейронних мереж Хопфілда з сигмоїдними функціями активації нейронів [3, 4].

### Встановлення стійкості точок рівноваги при використанні умови Ліпшиця

Симетричність матриці зв'язків між нейронами в практичних задачах може не забезпечуватися. Очевидно, що в цьому випадку побудова функції Ляпунова в наведеному варіанті неможлива. Однак відомі результати щодо стійкості точок рівноваги, які ґрунтуються на тому, що функції в системі рівнянь (8) повинні задовольняти умову Ліпшиця. Як відомо, функція  $f : D \subseteq R \rightarrow R$  задовольняє умову Ліпшиця, якщо існує така стала  $K \geq 0$ , що для всіх  $x_1, x_2$  в області  $D$  виконується співвідношення:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|. \quad (16)$$

Відповідне найменше значення  $K$  має назву сталої Ліпшиця. У [10] проаналізовано експоненційну стійкість моделі нейронної мережі Коена–Гроссберга без часових затримок та мережі з часовими затримками без припущення будь-якої симетрії матриці зв'язків і диференційованості та монотонності функцій активації. При цьому не використовується апарат функцій Ляпунова, однак на функції в цих рівняннях накладаються додаткові умови їх відповідності умові Ліпшиця. Система диференціальних рівнянь нейронної мережі розглядається у вигляді:

$$\frac{dx_i}{dt} = -a_i(x_i) \left[ b_i(x_i) - \sum_{j=1}^n t_{ij} s_j(x_j(t)) + J_i \right], \quad i = \overline{1, n} \quad (17)$$

для нейронної мережі без затримок та у вигляді

$$\frac{dx_i}{dt} = -a_i(x_i) \left[ b_i(x_i) - \sum_{j=1}^n t_{ij} s_j(x_j(t - t_{ij})) + J_i \right] \quad (18)$$

для нейронної мережі з затримками.

На функції  $a_i, b_i, s_j$  накладаються такі умови [10]:

1) функції  $a_i$  задовольняють умову Ліпшиця, є обмеженими та додатніми:  
 $0 < \underline{a}_i \leq a_i(x) \leq \overline{a}_i$ ;

2) функції  $b_i$  та обернені до них  $b_i^{-1}$  задовольняють умову Ліпшиця;

3) функції активації нейронів  $s_j$  задовольняють умову Ліпшиця;

4) функції активації  $s_i$  є обмеженими:  $|s_i(x)| \leq M_i$ ;  $M_i > 0$ .

У [10] доведено, що при цих умовах забезпечується існування точки рівноваги для систем (17) і (18), які мають одні й ті самі точки рівноваги. Крім того, в [10] показано, що при виконанні умов (1–4), а також при виконанні деяких інших додаткових умов виникає експоненційна стійкість точок

рівноваги системи нелінійних рівнянь, тобто існує така величина  $S > 0$ , що для кожного розв'язку  $x(t)$  виконується співвідношення:

$$\sum_{i=1}^n (x_i(t) - x_i^*)^2 \leq e^{-2St} \sum_{i=1}^n (x_i(0) - x_i^*)^2, \quad (19)$$

де  $x_i(0)$  – задані початкові значення розв'язку  $x_i(t)$ ;  $x_i^*$  – точка рівноваги.

### Автоколивання в рекурентних нейронних мережах з моделями нейронів Ходжкіна–Хакслі та частотновибірною

Як відомо, нейронні структури у живих системах виконують не лише функції формування, кодування, передачі та декодування сигналів, але й забезпечують у необхідних випадках функції автоколивань. У зв'язку з поширеністю автоколивальних процесів в нейронних структурах окремі нейрони навіть отримали назву “релаксаційні осцилятори” [11], а особливості коливальних процесів у групах нейронів розглядаються на основі аналізу процесів в ансамблях зв'язаних осциляторів.

Для отримання автоколивань в нейронній мережі необхідно реалізувати в ній додатний зворотний зв'язок. Виникнення автоколивань можна проілюструвати на прикладі найпростішої нейронної мережі з двох нейронів  $N_1$  та  $N_2$  зі зворотним зв'язком, зображеної на рис. 1. Моделювання виникнення коливань для такої структури проводилося на моделі Ходжкіна–Хакслі [12] та на частотновибірній моделі активації нейрона [13] з порівнянням результатів для обох моделей. В частотновибірній моделі нейрона попередня обробка вхідного сигналу в нейроні здійснюється смугопропускним фільтром, коефіцієнт передачі якого описується виразом:

$$K(j\omega) = \frac{j\omega t_0 (D_1 + D_2)}{(j\omega t_0 + D_1)(j\omega t_0 + D_2)}, \quad (20)$$

де  $\omega$  – колова частота;  $t_0$  – нормуюча стала часу;  $D_1, D_2$  – параметри фільтра, які визначають центральну частоту, коефіцієнт передачі на ній та ширину смуги пропускання.

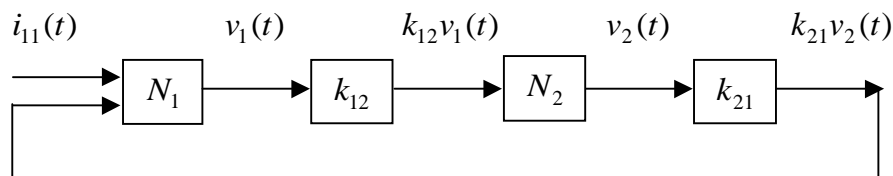


Рис. 1. Структура автоколивальної системи на двох нейронах

Елементи  $k_{12}$  та  $k_{21}$  визначають коефіцієнти зв'язку між нейронами, причому для моделі Ходжкіна–Хакслі елементи зв'язку виконують також функцію перетворення напруги на струм. Перший нейрон  $N_1$  має два активуючі входи, на перший з яких подається зовнішній сигнал запуску  $i_{11}(t)$ . Другий активуючий вхід забезпечує додатний зворотний зв'язок від нейрона  $N_2$ . При моделюванні на основі моделі Ходжкіна–Хакслі запуск автоколивань здійснювався прямокутним імпульсом струму тривалістю 10 мс та амплітудою густини струму  $10 \text{ мкА/см}^2$ .

На рис. 2, а зображено сигнал на виході першого нейрона у режимі автоколивань при однакових коефіцієнтах зв'язку між нейронами  $k_{12} = k_{21} = 0.4$ .

Автоколивання спостерігаються лише в певному діапазоні значень коефіцієнтів зв'язку. Так, наприклад, при тих самих тривалості та амплітуді імпульсу запуску автоколивання виникали лише в діапазоні значень коефіцієнтів зв'язку від 0.31 до 0.56. При цьому частота автоколивань змінювалася в межах 25–30 %. Припинити автоколивання можна, наприклад, подавши на гальмуючий вхід нейрона імпульс достатньої амплітуди та тривалості.

Аналогічні режими автоколивань можна отримати і для інших моделей нейронів, зокрема для частотновибірної моделі. На рис. 2, б зображений графік вихідної напруги  $v_1(t)$  нейрона  $N_1$  при

автоколиваннях в нейронній структурі на двох нейронах зі зворотним зв'язком на рис. 1 та використанні частотновибірної моделі нейрона. Цей режим автоколивань був отриманий при таких значеннях параметрів: однакові коефіцієнти зв'язку між нейронами  $k_{12}^* = k_{21}^* = 1$ ;  $t_0 = 1$  мс;  $D_1 = 5.26$ ;  $D_2 = 0.58$ ; порогові значення питомої енергії  $E_{1,th} = E_{2,th} = 12950 \cdot 10^{-9} \text{ В}^2 \times \text{с}$ .

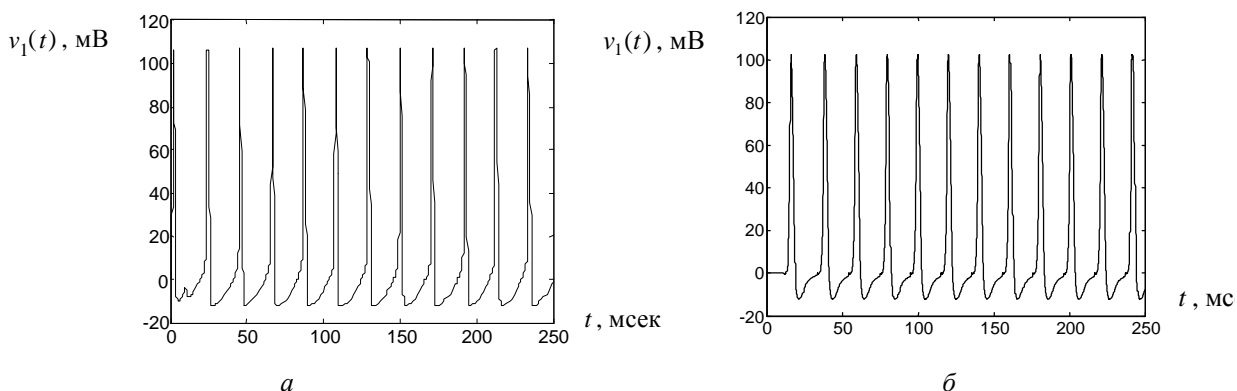


Рис. 2. Автоколивання в нейронній структурі зі зворотним зв'язком для моделі Ходжкіна–Хакслі (а) та для частотновибірної моделі (б)

Вказані значення параметрів підбрано так, щоб отримати таку саму частоту коливань (~50 Гц) для порогової активації нейрона, що й для моделі Ходжкіна–Хакслі. Це дає можливість зіставити параметри активації (порогове значення питомої енергії) частотновибірної моделі нейрона з параметрами активації (густиною струму) моделі Ходжкіна–Хакслі при активації обох моделей сигналами у формі нейроімпульсів:  $k_{12}I_{0,th} \Leftrightarrow k_{12}^*E_{1,th}$ . При цьому форми сигналів в обох випадках дещо відрізняються між собою внаслідок накладання перехідного процесу активації одного нейрона з вхідним сигналом від іншого.

### Синхронізація в нейронних мережах з моделлю нейронів “накопичення–скидання”

Дослідження питань синхронізації процесів в нейронних мережах є одним з важливих напрямів вивчення нейронних структур. Ефекти синхронізації пов'язані з механізмом обробки інформації нейронами в різних областях мозку, а також обумовлюють зв'язки між цими областями. На основі результатів експериментів висловлена гіпотеза, що синхронізація нейронної активності зорових областей мозку визначає зв'язування різних зорових елементів в один зоровий образ, який розпізнається як єдине ціле [11].

Нижче розглядається задача синхронізації моментів активації нейронів у глобально пов'язаній рекурентній нейронній мережі з  $N$  нейронами (мережі, в якій вихід кожного нейрона пов'язаний з входами всіх інших). Нейрони розглядаються на основі моделі “накопичення–скидання”. Всі нейрони вважаються ідентичними. Розглядається ситуація, коли кожен з нейронів знаходиться в стані автоколивань. При цьому динаміка нейрона в режимі “накопичення” визначається співвідношенням:

$$u(t) = u_0 + i_0 R (1 - e^{-(t-t)/RC}), \quad (21)$$

де  $u_0$  – напруга на виході нейрона в момент  $t$ ;  $i_0$  – струм активації нейрона (який вважається постійним);  $R$ ,  $C$  – параметри моделі.

Рівноважне значення напруги:  $u_\infty = u_0 + i_0 R$ . При досягненні вихідною напругою на нейроні порогового значення  $u_t$  напруга скидається в початкове значення (нуль), а напруги на всіх інших нейронах збільшуються на  $\Delta u / N$ , внаслідок чого деякі з них можуть синхронно

активуватися з цим нейроном, причому зворотний вплив на нейрон, який викликав активацію, блокується відповідно до наявності рефрактерного періоду.

При моделюванні динаміки активації нейронів мережі та встановленні особливостей синхронізації були задані такі значення параметрів:  $N=100$  ;  $u_0=0$  ;  $u_t/(i_0R)=0.5$  ;  $\Delta u/(i_0R)=0.1$  (ця величина визначає зв'язок між нейронами); нормований крок часової дискретизації  $t_0/(RC)=0.0025$  . Початкові значення вихідних напруг нейронів були задані рівномірно розподіленими на відрізку  $[0; u_t]$  . Дискретні значення вихідної напруги нейрона визначаються рекурентним співвідношенням:

$$u_{n+1} = u_n + (u_\infty - u_n)(1 - e^{-t_0/(RC)}) . \quad (22)$$

На рис. 3 зображено чотири часові інтервали динаміки функціонування нейронної мережі – крапками відображені моменти активації відповідних нейронів.

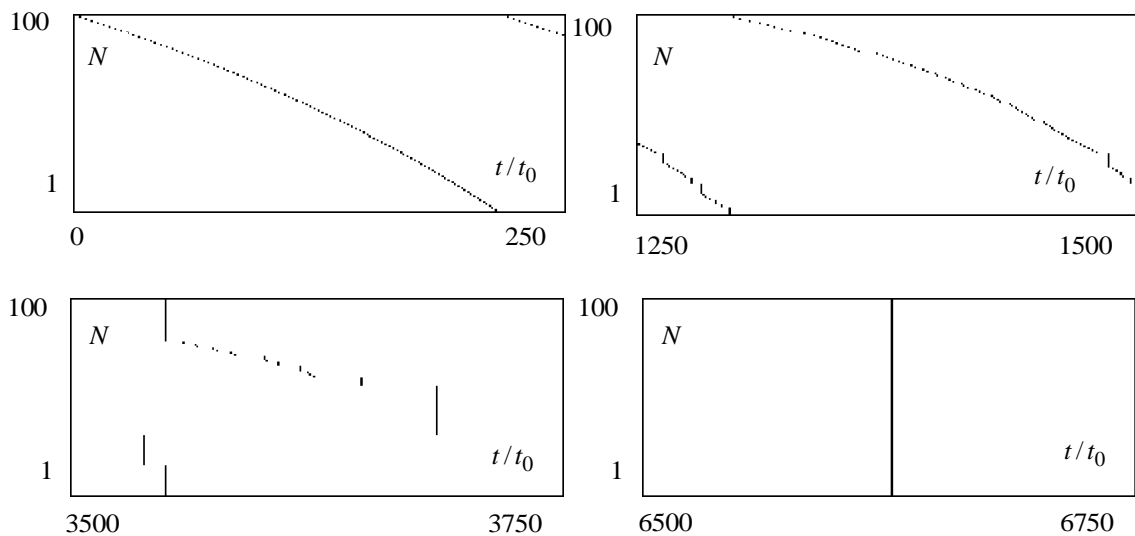


Рис. 3. Формування кластерів при функціонуванні нейронної мережі глобально зв'язаних нейронів

Як видно з наведених ілюстрацій, у першому часовому фрагменті (часовий інтервал  $t/t_0$  від 0 до 250) активація всіх нейронів відбувається в різні моменти часу. На другому часовому кадрі видно початок формування часових кластерів нейронів (очевидно, що в кластери об'єднуються нейрони, які знаходяться у найближчих станах (інтервал  $t/t_0$  від 1250 до 1500)). На третьому часовому кадрі в кластери об'єдналися великі групи нейронів (інтервал  $t/t_0$  від 3500 до 3750) і, нарешті, починаючи з часового інтервалу  $t/t_0$  від 6500 до 6750, всі нейрони активуються синхронно, тобто в нейронній мережі встановлюється режим ідеальної фазової синхронізації.

### Приклади динаміки рекурентних нейронних мереж

Нижче наведені кілька характерних прикладів функціонування рекурентної нейронної мережі Хопфілда з двома нейронами, які ілюструють можливості отримання різної кількості точок рівноваги. Наведені приклади для неперервної нейронної мережі Хопфілда описуються рівнянням:

$$t_i \frac{dx_i}{dt} = -x_i + f_i \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j + b_i \right), \quad i = \overline{1, n} . \quad (23)$$

У розглянутих прикладах  $n=2$  . Для сталих часу були вибрані значення  $t_i=1$  . Як функцію активації було вибрано лінійну функцію з насиченням, що забезпечує знаходження  $x_i$  в області  $[-1; 1]$ :



$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad (24)$$

На рис. 4, а зображено динаміку нейронної мережі при  $b_1 = 0.855$  ;  $b_2 = -b_1$  ;  $w_{11} = w_{22} = 0.223$  ;  $w_{12} = w_{21} = 0$  . Ці значення були отримані при попередньому навчанні нейронної мережі в її дискретному варіанті. У цьому випадку є одна точка рівноваги:  $x_1 = 1$  ;  $x_2 = -1$  . На рис. 4, б) зображено динаміку нейронної мережі з двома точками рівноваги при значеннях параметрів:  $b_1 = b_2 = 0$  ;  $w_{11} = w_{22} = 0.693$  ;  $w_{12} = w_{21} = -0.469$  . При цьому отримуються дві стійкі точки рівноваги:  $(-1; 1)$  і  $(1; -1)$ .

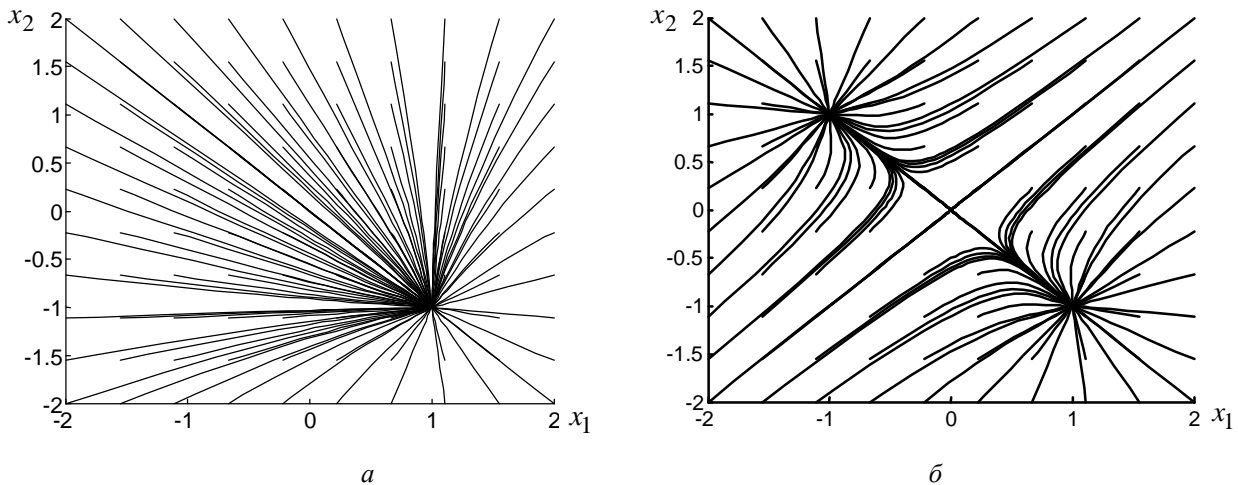


Рис. 4. Приклади динаміки рекурентної нейронної мережі Хопфілда з різною кількістю стійких точок рівноваги

При розрахунках динаміки нейронних мереж було використано програму інтегрування звичайних диференціальних рівнянь ode23s системи MATLAB.

### Висновки

На відміну від статичних нейронних мереж, побудованих переважно на моделях нейронів з безінерційними функціями активації, динамічні нейронні мережі забезпечують можливість моделювання динамічних процесів з визначенням відповідних часових характеристик. При побудові рекурентних нейронних мереж та реалізації в них зворотних зв'язків можливі динамічні процеси різного характеру – збіжні до деяких точок рівноваги, автоколивальні, хаотичні коливання. Для нейронної мережі з двох нейронів зі зворотним зв'язком проілюстровано виникнення автоколивань після початкового запуску при використанні моделі Ходжкіна–Хакслі та частотновибірної моделі. Синхронізація процесів в нейронних мережах є важливим механізмом встановлення зв'язків між фрагментами нейронної структури. На основі моделі “накопичення–скидання” для повнозв'язної рекурентної нейронної мережі проілюстровано виникнення кластеризації часових фрагментів, для яких активація нейронів відбувається синхронно.

1. Cohen M.A., Grossberg S. *Absolute Stability of Global Pattern Formation and Parallel Memory Storage by Competitive Neural Networks* // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. – 1983. – Vol. 13. – No. 5. – P. 815–826. 2. Бодянский Е.В., Руденко О.Г. *Искусственные нейронные сети: архитектуры, обучение, применения*. – Харьков: ТЕЛТЕХ, 2004. – 372 с. 3. Хайкин С. *Нейронные сети: Полный курс, 2-е издание / Пер. с англ.* – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2006. – 1104 с. 4. Тимощук П.В., Лобур М.В. *Основи теорії проектування нейронних мереж: Навч. посібник*. – Львів:

Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2007. – 328 с. 5. Zhang Y., Loguinov D. *On Delay-Independent Diagonal Stability of Max-Min Congestion Control*. – 2006. – 6 p. – Cdc2006.pdf. 6. Cao J., Wang J. *Global Exponential Stability and Periodicity of Recurrent Neural Networks With Time Delays* // *IEEE Transactions on Circuit and Systems – I: Regular Papers*. - 2005. – Vol. 52. – No. 5. – P. 920-931. - TCASI-Cao2005b.pdf. 7. Cao J., Wang J. *Absolute exponential stability of recurrent neural networks with Lipschitz-continuous activation functions and time delays* // *Neural Networks*. – 2004. – No. 17. – P. 379-390. - www.elsevier.com/locate/neunet. - NN-Cao2004.pdf. 8. Liu D., Hu S., Wang J. *Global Output Convergence of a Class of Continuous-Time Recurrent Neural Networks With Time-Varying Thresholds* // *IEEE Transactions on Circuits and Systems – II: Express Briefs*. – 2004. - Vol. 51. - No. 4. - P. 161-167. - liu-hu-wang.pdf. 9. Wei J., Ruan S. *Stability and bifurcation in a neural network model with two delays* // *Physica D*. – 1999. – No. 130. – P. 255-272. - WeiRuan-physicaD99.pdf. 10. Wang L., Zou X. *Exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks* // *Neural Networks*. - 2002. – No. 15. – P. 415-422. - www.elsevier.com/locate/neunet. - nn02.pdf. 11. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*. – Москва: Техносфера, 2003. – 496 с. 12. Gerstner W., Kistler W.M. *Spiking Neuron Models. Single Neurons, Populations, Plasticity*. - Cambridge University Press, 2002. - 5,26 MB. - <http://diwww.epfl.ch/~gerstner/SPNM/SPNM.html>. 13. Романишин Ю.М., Смердов А.А. *Математична модель активації нейрона на основі характеристики "сила-тривалість" та енергетичного критерію* // *Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: Наукові праці КДПУ*. - Вип. 5 (22). – Кременчук: КДПУ, 2003. – С. 126–130.