УДК 517.997

Обратная задача анизотропийного анализа робастного качества дискретных линейных стационарных систем[1]

А.П. Курдюков[2], В.Н. Тимин[2], М.М. Чайковский[2]

Аннотация – **This paper addresses the inverse problem of anisotropy-based performance analysis of linear discrete time-invariant system. The inverse problem consists in finding the maximum level of mean anisotropy of random input sequence corresponding to some given value of anisotropic norm of system. A unique solution is determined by solving a system of four cross-coupled nonlinear algebraic equations including Riccati, Lyapunov, and two scalar equations with respect to traces of symmetric matrices.**

Ключевые слова – **Линейные системы, случайные возмущения, норма, анизотропия**

I. Введение

Анизотропия случайного вектора и анизотропийная норма системы являются базовыми понятиями анизотропийного подхода к робастному стохастическому управлению, первоначально разработанного в середине 1990-х годов И.Г. Владимировым и представленного в [1]-[3]. Функционал анизотропии представляет собой энтропийно-теоретическую меру отклонения вероятностного распределения в евклидовом пространстве от гауссовских распределений с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей. Средняя анизотропия стационарной последовательности случайных векторов определена в [4] как интенсивность анизотропии на единицу времени для длинных сегментов последовательности. Применительно к случайным возмущениям, средняя анизотропия описывает количество статистической неопределенности, которая понимается как несоответствие между неточно известным фактическим распределением случайной помехи и семейством номинальных моделей, предполагающих, что возмущение является гауссовским белым шумом со скалярной ковариационной матрицей. a-Анизотропийная норма [3], [5] характеризует способность подавления возмущения дискретной линейной стационарной системой и определяется как наибольшее отношение мощностной нормы выхода системы к мощностной норме ее входа при условии, что средняя анизотропия входного возмущения не превышает заданного неотрицательного значения a.

В этой работе рассматривается обратная задача анизотропийного анализа робастного качества дискретных линейных стационарных системы, которая состоит в нахождении максимально уровня средней анизотропии случайной входной последовательности, который соответствует случаю, когда анизотропийная норма системы равна заданному значению γ.

II. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную линейную стационарную систему $F \in H_\infty^{p\times m}$ с m-мерным входом W, n-мерным состоянием X и p-мерным выходом Z:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где A, B, C, D — матрицы согласованных размерностей, и матрица A устойчива (ее спектральный радиус $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$). Предполагается, что входная последовательность W есть многомерная стационарная гауссовская случайная последовательность, уровень средней анизотропии которой не превышает $a \geq 0$, т.е. W производится из m-мерного гауссовского белого шума с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей устойчивым формирующим фильтром G из семейства

$$G_a = \{G \in H_2^{m_1 \times m_1} : \overline{A}(G) \leq a\},$$

где

$$\overline{A}(G) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\frac{m_1 \overline{G}(\omega)\overline{G}(\omega)^*}{\|G\|_2^2} d\omega \tag{2}$$

— функционал средней анизотропии [3],

$$\overline{G}(\omega) = \lim_{r \to 1-} G(re^{i\omega}),\ \omega \in [-\pi, \pi]$$

— граничное значение передаточной функции $G(z)$. Функционал средней анизотропии (2), который всегда неотрицателен, принимает конечные значения, если формирующий фильтр G имеет полный ранг, т.е. если $\operatorname{rank}\overline{G}(\omega) = m$ для почти всех $\omega \in [-\pi, \pi)$. В противном случае $\overline{A}(G) = +\infty$ [3], [5]. Равенство $\overline{A}(G) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда G является системой полного пропускания (фазовращающей системой) с точностью до ненулевого постоянного множителя. В этом случае входная случайная последовательность W является гауссовским белым шумом с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m.

a-Анизотропийная норма системы (1) определяется в [3], [5] как

$$|||F|||_a = \sup_{G \in G_a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}. \tag{3}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-08-90436-Укр_а, 11-08-00714-а)

[2] Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117997, РОССИЯ, E-mail: mmtchaikovsky@hotmail.com

Как показано в [1], [5], a-анизотропийная норма заданной системы $F \in H_\infty^{p\times m}$ является неубывающей непрерывной функцией параметра a, удовлетворяющей неравенствам

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|F\|_2 = |||F|||_0 \le \lim_{a\to+\infty}|||F|||_a = \|F\|_\infty.$$

Эти выражения показывают, что H_2 и H_∞ нормы систем [6] являются предельными случаями a-анизотропийной нормы при $a \to 0,+\infty$, соответственно. Постановка задачи формулируется следующим образом.

Задача: Пусть устойчивая система $F \in H_\infty^{p\times m}$ определяется уравнениями (1) и пусть задано вещественное положительное число $\gamma \in [m^{-1/2}\|F\|_2, \|F\|_\infty)$. Требуется найти уровень средней анизотропии многомерной случайной входной последовательности $a \ge 0$, обеспечивающий выполнение равенства $|||F|||_a = \gamma$.

III. Основной результат

Сформулируем основной результат. Следующая теорема устанавливает достаточные условия для вычисления максимального уровня средней анизотропии гауссовской случайной входной последовательности, соответствующего заданному значению анизотропийной нормы системы.

Теорема: Для заданной устойчивой системы $F \in H_\infty^{p\times m}$ любого положительного числа $\gamma \in [m^{-1/2}\|F\|_2, \|F\|_\infty)$. и некоторого уровня a средней анизотропии случайной входной последовательности W, равенство

$$|||F|||_a = \gamma \tag{4}$$

выполняется, если существует решение (q, R, P), $q \in [0, \|F\|_\infty^{-2})$, $R = R^T > 0$, $P = P^T > 0$, системы перекрестно-связанных нелинейных матричных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} R &= A^T RA + qC^T C + L^T \Sigma^{-1} L \\ L &= \Sigma(B^T RA + qD^T C) \\ \Sigma &= (I_m - B^T RB - qD^T D)^{-1} \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

$$P = (A+BL)P(A+BL)^T + B\Sigma B^T, \tag{6}$$

$$\mathrm{tr}((C+DL)P(C+DL)^T + DTD^T) = \gamma^2, \tag{7}$$

$$\mathrm{tr}(LPL^T + \Sigma) = 1. \tag{8}$$

При этом уровень средней анизотропии случайной входной последовательности W равен

$$a = -\frac{1}{2}\ln\det(m\Sigma). \tag{9}$$

Замечание: Уровни a_s и a_t пространственной и временной составляющей средней анизотропии a входной последовательности W (см. [5]) вычисляются по формулам

$$a_s = -\frac{1}{2}\ln\det((LPL^T + \Sigma)(LRL^T + \Sigma)^{-1}),$$

$$a_t = \frac{1}{2}\ln\det(m(LPL^T + \Sigma)),$$

соответственно.

IV. Заключение

Получено решение обратной задачи анизотропийного анализа робастного качества. Эта задача состоит в нахождении уровня средней анизотропии случайной векторной входной последовательности, соответствующего некоторму заданному значению анизотропийной нормы системы. Показано, что анизотропийная норма системы равна заданному значению из допустимого диапазона, если существует решение системы из четырех перекрестно-связанных нелинейных матричных алгебраических уравнений. Решение обратной задачи анализа определяется единственным образом из решения системы алгебраических уравнений.

Список ссылок

[1] A.V. Semyonov, I.G. Vladimirov, and A.P. Kurdjukov, "Stochastic approach to H_∞-optimization," in *33rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Florida, USA, pp. 2249-2250, 1994.

[2] И.Г. Владимиров, А.П. Курдюков, А.В. Семенов, "Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем," *Доклады РАН*, Т. 342, № 3, С. 583-585, 1995.

[3] I.G. Vladimirov, A.P. Kurdjukov, and A.V. Semyonov, "On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems," in *13th IFAC World Congress*, San-Francisco, California, pp. 179-184, 1996.

[4] I.G. Vladimirov, P. Diamond, and P. Kloeden, "Anisotropy-based performance analysis of finite horizon linear discrete time varying systems," *Automation and Remote Control*, V. 8, pp. 1265-1282, 2006.

[5] P. Diamond, I.G. Vladimirov, A.P. Kurdyukov, and A.V. Semyonov, "Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems," *Int. J. of Contr.*, V. 74, pp. 28-42, 2001.

[6] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, "Robust and optimal control", *Prentice Hall*, *Upper Saddle River*, *NJ*, 1996.