

надходить до деталі при використанні інструмента з нарізаними поперечними пазами. При обробці інструментом з гладкою робочою частиною додеталі надходить найменша кількість теплоти – 18 % від загальної кількості теплоти. При використанні інструмента з поперечними пазами чи з нахиленими різнонапрямленими пазами у зоні контакту інструмент–деталь відбувається додаткове нагрівання поверхневих шарів за рахунок інтенсифікації зсувного деформування поверхнього шару металу. При цьому слід зазначити, що загальні енергозатрати на фрикційне зміцнення також менші, ніж при обробці інструментом з гладкою робочою поверхнею.

**Висновки.** На кількість теплоти та її частки, яка виділяється у поверхневий шар, при фрикційному зміцненні вуглецевих і низьколегованих сталей значно впливають режими обробки та форма робочої поверхні інструмента. Найбільша кількість теплоти виділяється у поверхневий шар при зміцненні інструмента нарізаними поперечними пазами на його робочій частині.

1. *Бабей Ю.И., Бутаков Б.И., Сысоев В.Г. Поверхностное упрочнение металлов. – К.: Наукова думка, 1995. – 253 с.* 2. *Гриднев В.А., Трефилов В.И. Фазовые и структурные превращения и метастабильное состояние в металлах. – К.: Наукова думка, 1988. – 264 с.* 3. *Шевченко С.В., Стеценко Н.Н. Наноструктурные состояния в металлах, сплавах и интерметаллических соединениях: методы получения, структура, свойства // Успехи физ. мет. – 2004. – Т. 5. – С. 219–255.* 4. *Акишин А.И., Бондаренко Г.Г., Быков Д.В. и др. Физика воздействия концентрированных потоков энергии на материалы. – М.: Изд-во УНЦ ДО, 2004. 418 с.* 5. *Гурей І.В., Гурей Т.А., Плахтій Л.В. Вплив фрикційного зміцнення на товщину поверхнього шару чавуну // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 1999. – Т. 4, № 2. – С. 45–50.*

УДК 621.86-182.7

Є. В. Харченко, Ю. Є. Носов

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра опору матеріалів

## АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЩОГЛОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ ПІДЙІМАЛЬНОГО ПРИСТРОЮ

© Харченко Є.В., Носов Ю.Є., 2012

**Оцінено динамічну стійкість щоглової конструкції підйімального пристрою, що має декілька проміжних опор. Для побудови зон стійкості та нестійкості застосовуються теорії динамічної стійкості В. В. Болотіна та Н. М. Беляєва.**

**There is performed evaluation of mast construction dynamic stability of the lifting device which has few intermediate supports. For receiving stability and instability regions are applied theories of dynamic stability by V. Bolotin and N. Belyaev.**

**Вступ.** Важливим критерієм працездатності висотних інженерних конструкцій є забезпечення їхньої стійкості за дії статичних і динамічних навантажень. Розрахунок на стійкість полягає у визначенні так званих критичних навантажень, які обумовлюють втрату початкової форми рівноваги, що здебільшого призводить до руйнування несівних елементів конструкцій.

Особливий практичний інтерес становлять задачі динамічної стійкості, що є суміжними з проблемами теорії коливань. Теорію динамічної стійкості найповніше висвітлено для випадку

прямолинійного стрижня, на який діє періодична поздовжня сила. Згідно з теорією коливань, якщо амплітуда осьової періодичної сили є меншою від критичного значення, то стрижень зазнає лише поздовжніх коливань. З теорії динамічної стійкості [1–6] випливає, що за певних співвідношень між частотою збурення  $\theta$  і частотою вільних поперечних коливань  $\Omega$  прямолинійна форма стрижня стає динамічно нестійкою, оскільки в системі виникають поперечні коливання стрижня, амплітуда яких швидко зростає в часі.

**Постановка задачі.** Метою даної праці є дослідження динамічної стійкості багатопрогенової щоглової конструкції підйимального пристрою, навантаженої осьовою періодично змінною силою. Дослідження виконуємо, користуючись розробленими В. В. Болотіним та Н. М. Беляєвим теоріями динамічної стійкості [1, 2].

Розглянемо випадок вертикального стрижня з верхнім, нижнім і декількома проміжними шарнірними закріпленнями (рис. 1). На рис. 1, а зображено схему пружної системи, а на рис. 1, б – перші форми її вільних коливань за різного числа проміжних опор.

У задачах статичної стійкості [7] прогин стрижня виражається функцією  $y(x)$ , яка залежить лише від поздовжньої координати стрижня. Однак, у задачах динамічної стійкості функція прогинів залежить від двох змінних – координати  $x$  і часу  $t$ . Позначаючи функцію прогину як  $v(x, t)$ , подаємо її у вигляді  $v(x, t) = f(t) \cdot y(x)$ , де  $f(t)$  – змінна в часі амплітуда (максимальний прогин) стрижня [6]. Оскільки змінні  $t$  та  $x$  незалежні між собою, розв'язок складових функцій прогину  $f(t)$  і  $y(x)$  шукаємо окремо.

**Визначення власної форми шарнірно опертого стрижня.** Диференціальне рівняння вільних згинних коливань стрижня має вигляд [8]:

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де  $EJ$  і  $m$  – відповідно згинна жорсткість і погонна маса стрижня.

Часову залежність прогинів стрижня задаємо у вигляді гармонічної функції, а форми коливань – у вигляді залежності прогинів від поздовжньої координати. З урахуванням першої форми коливань прогини стрижня записуємо як

$$v(x, t) = y(x) \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

де  $\omega$  – циклічна частота вільних коливань стрижня;  $\varphi$  – початкова фаза коливань.

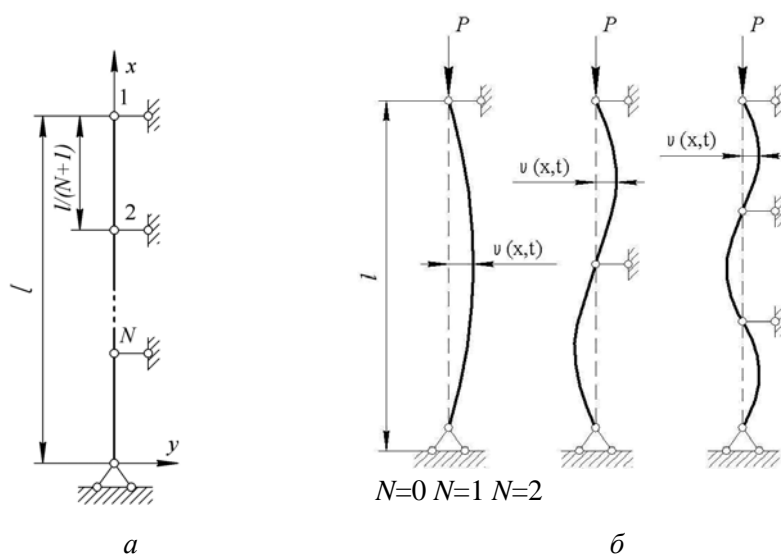


Рис. 1. Схема вертикального стрижня (а) та перші форми коливань стрижня з різною кількістю проміжних опор (б)

Підставивши вираз (2) у рівняння (1), отримаємо

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - m\omega^2 y = 0. \quad (3)$$

Розв'язок диференціального рівняння (3) записуємо у вигляді:

$$y = C_1 Y_1(\alpha x) + C_2 Y_2(\alpha x) + C_3 Y_3(\alpha x) + C_4 Y_4(\alpha x), \quad (4)$$

де  $C_1, \dots, C_4$  – сталі величини;  $\alpha$  – коефіцієнт,

$$\alpha = \sqrt[4]{\omega^2 m / EJ};$$

$Y_1, \dots, Y_4$  – функції Кривола [9]:

$$\begin{aligned} Y_1(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\alpha x) + \cos(\alpha x)); & Y_2(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(\alpha x) + \sin(\alpha x)); \\ Y_3(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\alpha x) - \cos(\alpha x)); & Y_4(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(\alpha x) - \sin(\alpha x)). \end{aligned} \quad (5)$$

Відомо, що похідні функцій Кривола пов'язані між собою залежностями:

$$\frac{dY_1}{dx} = \alpha Y_4; \quad \frac{dY_2}{dx} = \alpha Y_1; \quad \frac{dY_3}{dx} = \alpha Y_2; \quad \frac{dY_4}{dx} = \alpha Y_3.$$

Постійні  $C_i$  визначаємо з граничних умов:

$$C_1 = y(0); \quad C_2 = \frac{1}{\alpha} y'(0); \quad C_3 = \frac{1}{EJ\alpha^2} M(0); \quad C_4 = \frac{1}{EJ\alpha^3} Q(0),$$

де  $y(0), y'(0), M(0), Q(0)$  – відповідно амплітудні значення прогину, кута повороту поперечного перерізу, згинального моменту і поперечної сили, що відповідають поздовжній координаті стрижня  $x = 0$ .

Визначимо залежність прогину від поздовжньої координати у вигляді функції  $y(x)$  для випадку шарнірних закріплень на кінцях стрижня. Граничні умови при цьому набувають вигляду:

$$y(0) = 0; \quad y''(0) = 0; \quad y(l) = 0; \quad y''(l) = 0.$$

Частковий випадок розв'язку рівняння поперечних коливань стрижня отримуємо із залежності (4), враховуючи граничні умови на нижньому кінці щогли ( $x = 0$ ):

$$y(x) = C_2 Y_2(\alpha x) + C_4 Y_4(\alpha x). \quad (6)$$

Беручи до уваги граничні умови на верхньому кінці стрижня ( $x = l$ ), знаходимо

$$\begin{cases} y(l) = 0; \\ y''(l) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 Y_2(\alpha l) + C_4 Y_4(\alpha l) = 0; \\ C_2 Y_4(\alpha l) + C_4 Y_2(\alpha l) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Прирівнюючи до нуля визначник системи рівнянь (7), знаходимо вираз власної частоти стрижня:

$$\omega = \alpha^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (8)$$

З урахуванням залежності  $C_4 = -C_2$ , що випливає із системи рівнянь (7), а також рівності (6), визначаємо власну форму стрижня:

$$y(x) = C_2 \cdot [Y_2(\alpha x) - Y_4(\alpha x)] = C_2 \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

**Рівняння динамічної стійкості.** Деформацію шарнірно закріпленого стрижня (рис. 1, а) описуємо із застосуванням закону Гука для згину:

$$\frac{1}{\rho(x, t)} = \frac{M(x, t)}{EJ},$$

де  $\rho(x, t)$  – радіус кривизни стрижня;  $M(x, t)$  – згинальний момент.

Враховуючи, що  $M(x, t) = P \cdot v(x, t)$  та  $1/\rho(x, t) = -\partial^2 v / \partial x^2$ , отримуємо диференціальне рівняння прогинів осі стрижня:

$$EJ \frac{d^2 v}{dx^2} + P \cdot v = 0, \quad (9)$$

де  $v$  – поперечне переміщення стрижня відносно його вертикальної осі;  $P$  – поздовжня сила:

$$P = P_0 + P_t \cdot \sin(\theta \cdot t),$$

де  $P_0$  – постійна складова збудуючої сили;  $P_t$  – амплітуда змінної складової збудуючої сили.

Враховуємо сили інерції, що діють у перпендикулярному до осі стрижня напрямку. Інерційні навантаження, що пов'язані з обертанням поперечних перерізів відносно своїх головних осей, до уваги не беремо, оскільки поперечні розміри стрижня є на порядок меншими від його довжини. Не враховуємо також сил інерції поздовжніх коливань, оскільки вони є незначними порівняно з поперечними силами інерції. Отже:

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Функцію прогину стрижня шукаємо у вигляді добутку часової залежності амплітуди коливань та відомої функції прогину:

$$v(x, t) = f(t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (11)$$

де  $l$  – довжина стрижня,  $k$  – число півперіодів першої форми коливань стрижня, що визначається як  $k=N+1$ , де  $N$  – число проміжних опор.

Підставляючи функцію (11) до рівняння (10), отримуємо

$$\left[ EJ \frac{k^4 \pi^4 f(t)}{l^4} - P \frac{k^2 \pi^2 f(t)}{l^2} + m \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} = 0. \quad (12)$$

Прирівнюючи вираз у дужках до нуля, отримуємо диференціальне рівняння Мат'є:

$$f'' + \Omega^2 (1 - 2\mu \cdot \cos(\theta t)) \cdot f = 0, \quad (13)$$

де  $P_{кр}$  – сила статичної стійкості стрижня;  $\mu$  – коефіцієнт збурення;  $\omega$  – власна циклічна частота ненавантаженого стрижня;  $\Omega$  – власна циклічна частота стрижня, навантаженого постійною складовою поздовжньою силою  $P_0$ .

Силу статичної стійкості, коефіцієнт збурення та циклічну частоту вільних коливань стрижня, навантаженого постійною поздовжньою силою, визначаємо за відомими формулами [1, 2]:

$$P_{кр} = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}; \quad \mu = \frac{P_t}{2(P_{кр} - P_0)}; \quad \Omega = \omega \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_{кр}}}.$$

Особливістю розв'язків рівняння (13) є наявність областей нестійкості, тобто, такого набору параметрів механічної системи, за якого розв'язок рівняння Мат'є безмежно зростає. Втрата стійкості стрижня можлива у випадку так званого параметричного резонансу, який настає тоді, коли виконується рівність частоти збудуючої сили  $\theta$  подвійній частоті власних коливань  $\Omega$ . Ще однією особливістю параметричного резонансу є наявність резонансних коливань на частотах, менших від частоти головного резонансу. В. В. Болотін у праці [1] виділяє три області нестійкості, межі яких зображені на рис. 2. Із зазначеного рисунка бачимо, що межі першої області нестійкості є лінійними, а другої і третьої областей – нелінійними. Резонанс вищих областей нестійкості настає за менших навантажень та більших частот збурення.

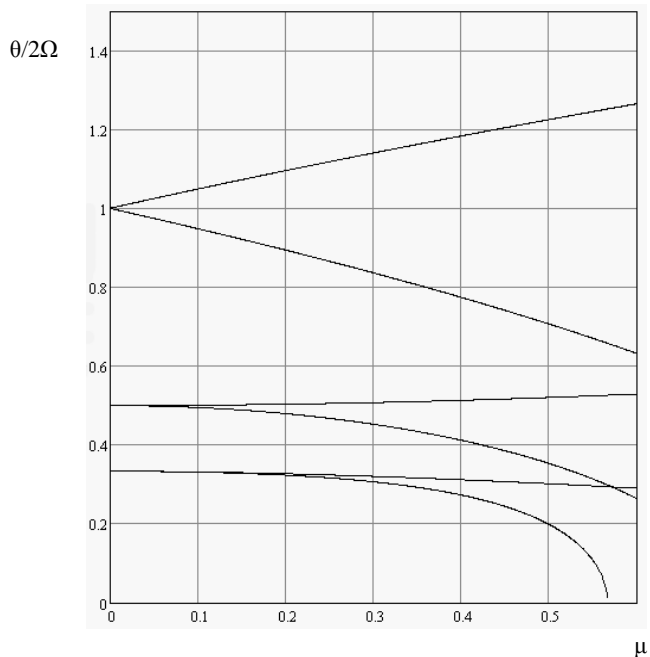


Рис. 2. Границі областей нестійкості за В. Болотіним

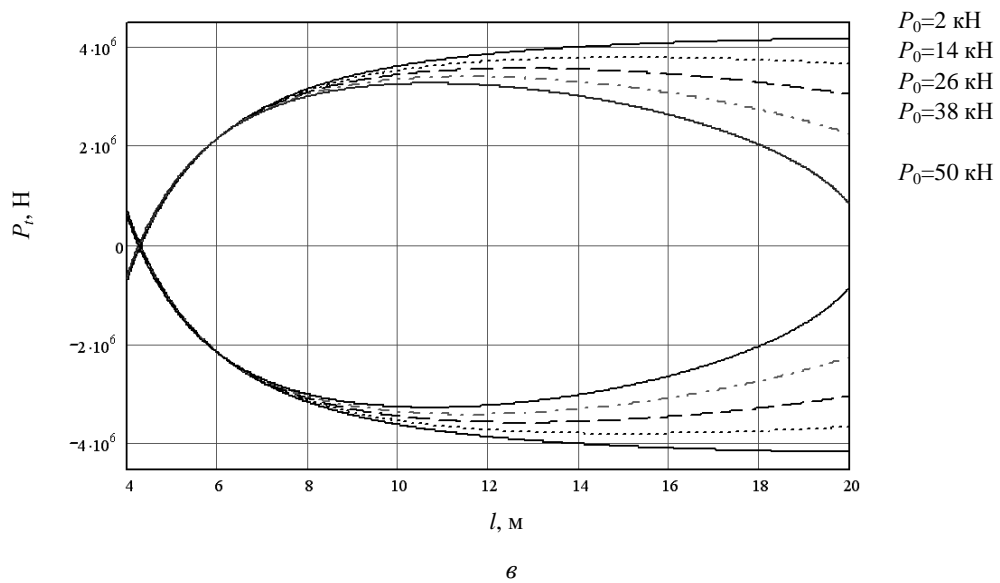
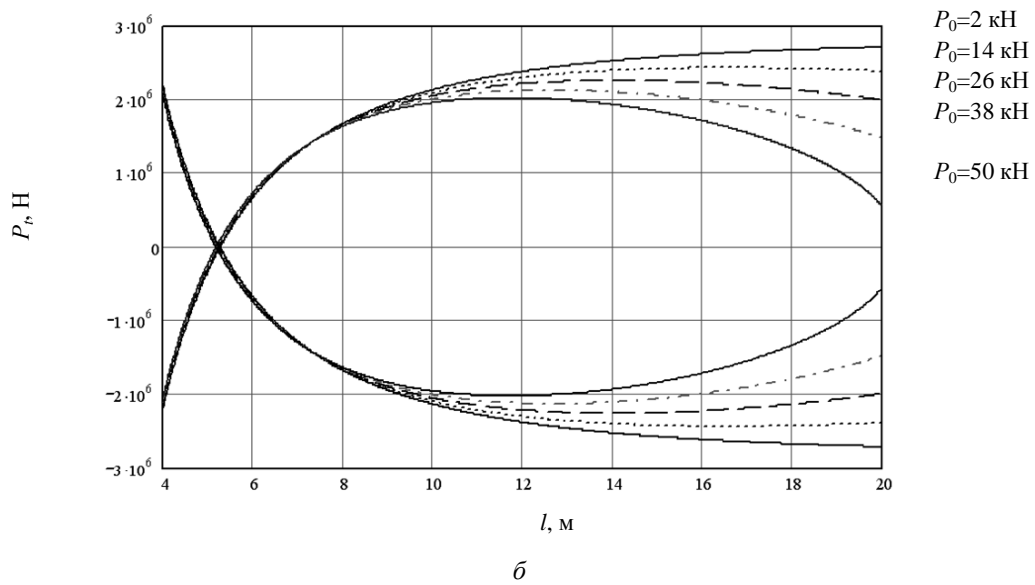
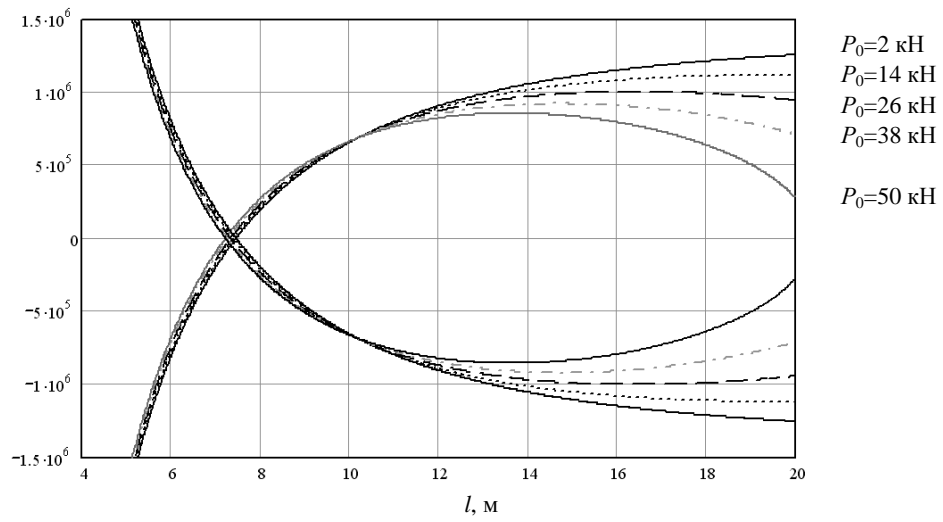


Рис. 3. Залежність критичного значення амплітуди змінної складової навантаження  $P_r$  від довжини стрижня  $l$  для різних значень постійної складової навантаження  $P_0$  та частоти збуджуючої сили:  
*a* –  $\theta/2\pi = 25 \text{ Гц}$ ; *б* –  $\theta/2\pi = 50 \text{ Гц}$ ; *в* –  $\theta/2\pi = 75 \text{ Гц}$

**Визначення критичної амплітуди осевого навантаження.** Для оцінки стійкості системи та визначення критичної сили скористаємося формулою Н. Беляєва:  $\theta=2\Omega(1\pm\mu/2)$  [2], яку перетворимо до вигляду:

$$P_t^+ = \frac{2\theta}{k\pi} \sqrt{m(k^2\pi^2 EJ - P_0 l^2)} - \frac{4k^2\pi^2 EJ}{l^2} + 4P_0, \quad P_t^- = -\frac{2\theta}{k\pi} \sqrt{m(k^2\pi^2 EJ - P_0 l^2)} + \frac{4k^2\pi^2 EJ}{l^2} - 4P_0, \quad (14)$$

де  $P_t^{+,-}$  – шукане критичне значення амплітуди змінної складової осевої сили.

Систему можна вважати стійкою, якщо амплітуда навантаження знаходиться в області, обмеженій кривими (14), тобто

$$\min(P_t^-; P_t^+) \leq P_t \leq \max(P_t^-; P_t^+).$$

На рис. 3 зображено залежність  $P_t = f(l, \theta, P_0)$ . Параметри системи добирали так, щоб значення гнучкості конструкції  $\lambda$  задовольняло нерівність:  $\lambda = \mu/l > 100$ . Вихідні дані:  $k=0$  (проміжні опори відсутні);  $m=10,61$  кг/м;  $J=3,052 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>;  $E=6,9 \cdot 10^{10}$  Па. Постійну складову осевого навантаження приймали в межах від 2 до 50 кН, причому її значення не перевищувало критичної ейлерівської сили для усього діапазону зміни довжини стрижня ( $P_{кр}=5,2 \cdot 10^4$  Н для  $l=20$  м), тобто, умова статичної стійкості забезпечується.

Графіки часових залежностей, зображених на рис. 3, є симетричними відносно осі абсцис. Проаналізувавши їх, виявили такі закономірності:

- залежність  $P_t$  від  $l$  за сталих  $\theta, P_0$  показує, що критичне значення амплітуди навантаження спадає до нуля з наближенням довжини стрижня до деякого небезпечного значення (7,5; 5,3 і 4,4 м для  $\theta/2\pi = 25; 50; 75$  Гц відповідно), що відповідає рівності частоти вільних коливань стрижня частоті збурюючої сили. З подальшим зростанням довжини стрижня значення критичної амплітуди переходить через максимум і плавно спадає до нуля. Це пояснюється тим, що зі збільшенням довжини стрижня зменшується статична критична сила, наближаючись до значення постійної складової навантаження  $P_0$ ;

- зі збільшенням  $P_0$  критичне значення амплітуди змінної складової навантаження  $P_t$  зменшується, що проявляється у звуженні зони стійкості. Це пов'язано зі зростанням сумарної динамічної сили, та можливістю стрижневої системи втратити стійкість як від динамічного, так і від статичного навантаження;

- у випадку збільшення  $\theta$  збільшується критична амплітуда  $P_t$ , тобто збільшується зона динамічної стійкості. Це пояснюється збільшенням різниці між частотою збурюючої сили і частотою власних коливань стрижня, про що також свідчить зменшення його небезпечної довжини.

**Висновки.** Для дослідження динамічної стійкості стрижневої системи істотне значення має проведення порівняльного аналізу частот збурюючих сил і частот вільних коливань механічної системи. На стадії інженерного проектування стрижневих конструкцій слід забезпечувати такі умови, щоб власна частота механічної системи була максимально віддаленою від частот вимушених коливань. Цього можна досягти, добираючи геометричні розміри та пружно-інерційні параметри несівної конструкції.

Побудовані залежності критичної амплітуди змінної складової збурюючої сили від довжини стрижня та результати досліджень впливу постійної складової збурюючої сили і частоти змінної складової на ці залежності можна застосовувати в інженерній практиці з метою забезпечення стійкості щоглових конструкцій.

Втрата динамічної стійкості стрижневої системи може настати навіть у тому випадку, коли значення осевого навантаження є значно меншим, ніж статична критична сила. Основним критерієм динамічної стійкості слід вважати не амплітуду зовнішнього навантаження, а його частоту.

1. Болотин В.В. *Динамическая устойчивость упругих систем.* – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 600 с. 2. Беляев Н.М. *Сборник “Инженерные сооружения и строительная механика”*, 1924. 3. Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем.* – М.: Наука, 1967. – 984 с. 4. Тимошенко С. П. *Устойчивость упругих систем.* – М.: Гостехтеоретиздат, 1955. – 567 с. 5. Болотин В.В. *О поперечных колебаниях стержней, вызы-*

ваемых периодическими продольными силами // Сборник “Поперечные колебания и критические скорости”. – М.: Изд. АН СССР, 1951. – С. 46–77. 6. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Расчет вибраций рамных конструкций с учетом нормальных сил при помощи методов нелинейной механики // Сборник “Исследование колебаний конструкций”. – ДНТВУ, 1935. 7. Справочник по сопротивлению материалов // Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.; Отв. ред. Писаренко Г.С. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с. 8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1980. – 480 с. 9. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 500 с.

УДК 621.01

**І.В. Кузьо, О.В. Ланець, В.І. Лозинський\***  
Національний університет “Львівська політехніка”  
кафедра механіки та автоматизації машинобудування,  
\*кафедра ЕЗІКТ

## **ВСТАНОВЛЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ АЕРОІНЕРЦІЙНОЇ ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ ЗА УМОВИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МІНІМАЛЬНОГО ЗБУРЮВАЛЬНОГО МОМЕНТУ**

© Кузьо І.В., Ланець О.В., Лозинський В.І., 2012

**Встановлено інерційно-жорсткісні параметри механічної коливальної системи вібраційної машини з аероінерційним збуренням за умови забезпечення її робочих білярезонансних режимів роботи при мінімальних значеннях приводного моменту, що прикладається до крильчатки з жорстко закріпленим дебалансом. Необхідні розрахунки проведені в програмному продукті MathCAD 13.**

**From the condition providing the working near resonances mode with minimum value of the drive moment, applied to the impeller with rigid fastened unbalance, the inertia-inflexibility parameters of vibratory machine mechanical oscillating system with the aeroinertia indignation are set in the article. Calculations conducted in the software product of MATHCAD 13 are needed.**

**Вступ та огляд літератури.** У статтях [1, 2] запропоновано новий підхід до створення низькочастотного вібраційного технологічного обладнання, згідно з яким дебаланс жорстко з'єднується з крильчаткою, яка приводиться в обертальний рух за допомогою повітряних потоків, що розкручують дебаланс на номінальну частоту обертання в білярезонансному режимі роботи вібраційної машини. Встановлення обертів дебаланса здійснюється шляхом його “зависання” в дорезонансному режимі відносно однієї з власних частот тримасової механічної коливальної системи. При цьому вібраційний момент [3, 4] на валі дебалансного віброзбудника є вищим за збурювальний, який генерується крильчаткою. Дебаланс, не маючи необхідного моменту збурення для переходу через резонанс, “зависає” на певній частоті обертання в дорезонансному режимі.

Такий привід отримав назву аероінерційного. Перевагою схеми з аероінерційним збуренням є її простота та наявність автоматично набутого захисту приводу від перевантаження в умовах використання резонансних режимів роботи. Даний підхід повністю усуває вплив руху дебаланса на джерело збурення, а як наслідок – інерційний віброзбудник може входити у будь-які режими роботи.