

УДК 678.06.001.24:681.3

Ю.В. ЧОВНЮК, М.Г. ДІКТЕРУК

Київський національний університет будівництва і архітектури

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКОВИХ СХЕМ НЕСТАЦІОНАРНИХ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ПРИ УДАРНОМУ ТА ІМПУЛЬСНОМУ ВИДАХ НАВАНТАЖЕНЬ В'ЯЗКОПРУЖНИХ АМОРТИЗАТОРІВ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН

© Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., 2010

Встановлено основні особливості розрахункових схем нестационарних динамічних задач для ударного та імпульсного видів навантажень в'язкопружних амортизаторів вібраційних машин.

The main mechanisms of calculated schemes for nonstationary dynamic problems of impact and impulse loading of viscoelastic shock-absorbers of vibration machines are installed.

Постановка проблеми. Ударний та імпульсний види навантажень переважно визначають розрахункові схеми нестационарних динамічних задач. Найцікавішими як для практики, так й для теорії слід назвати задачі удару, пов'язані з появою та зникненням зв'язків. Для амортизаторів вібраційних машин таким ударним навантаженням є удар жорсткого тіла з подальшим відскоком тіла від амортизатора.

Для розв'язання нестационарних динамічних в'язкопружних задач доволі часто використовують методи перетворень Лапласа та Фур'є, але при загальних моделях лінійної в'язкопружної поведінки матеріалів процес обернення зображень пов'язаний зі значними математичними труднощами. Найближчі методи обернення, котрі використовуються у статистиці, у динамічному випадку неприйнятні, оскільки полюси у площині перетворення необов'язково будуть лежати на від'ємній дійсній вісі. Застосування перетворення Лапласа з подальшим числовим перетворенням зображень для частинної постановки розглядуваної нижче задачі дало змогу отримати тільки залежності переміщень від часу [1, 2].

Тому перевагу слід надати варіаційним методам, заснованим на застосуванні принципу віртуальної роботи Лагранжа, методу Бубнова-Гальоркіна чи функціоналу, запропонованого для незв'язаних динамічних в'язкопружних задач [3].

За такого підходу як координатні функції використовують власні функції відповідних пружних задач. Так, використання власних функцій у процедурі Рітца дає змогу шукати розв'язок, який задовольняє тотожно координатну частину рівняння руху й однорідні граничні умови задачі, а також шукати розв'язок у вигляді розкладу за власними формами у випадку вимушеного навантаження.

Для виявлення розрахункових особливостей у даній роботі розглянутий аналітичний розв'язок задачі удару жорсткого тіла по в'язкопружному стрижню скінченної довжини.

Слід зазначити, що аналітичні моделі (як і проблеми, пов'язані з їх аналітичним розв'язком) виникають й при дослідженні реологічних властивостей бетонних/будівельних сумішей динамічним методом [4].

Огляд літератури за темою дослідження. Деякі особливості розрахунку алгоритмів вібраційних машин при їх ударному та імпульсному видах навантажень розглянуті у [2]. У роботах [5–9] викладені методи усереднення та заморожування, які покладено в основу розв'язання типових рівнянь, що описують розглядувані процеси.

Дослідженню реологічних властивостей бетонних/будівельних сумішей динамічним методом присвячені роботи [4, 10, 11].

Слід зазначити, що основною технологічною задачею у виробництві бетонних робіт є приведення суміші у текучий стан з метою заповнення заданого об'єму чи форми й граничного зниження порозності шляхом видалення затиснутого повітря. Зазвичай ця задача розв'язується шляхом динамічного знакозмінного навантаження.

За твердженням авторів [4, 10, 11], залежно від характеру динамічного впливу загальний цикл ущільнення можна розділити на три стадії. На першій спостерігається переукладання складових, для котрої характерне випадкове розміщення зерен та повітряних порожнин, а також неповний контакт частинок між зернами. Тому будову з позицій фізико-механічних та реологічних властивостей можна класифікувати як нестійку структуру.

Під дією динамічних навантажень система легко переходить у другу стадію шляхом перебудови випадкової структури у стійку у результаті перекладання та взаємодії орієнтації зерен заповнювача. Цей період характеризується утворенням сольватних оболонок, виділенням та охоплюванням рідкою фазою поверхні крупного заповнювача. За даними О.С. Десова [10], виникають умови, коли систему можна подати у вигляді набору часточок зі змащуванням. Останній етап, на думку О.О. Савінова [11], можна оцінити як стадію компресійного ущільнення, на котрій досягають незначного приросту щільності.

Доцільність розділення процесу ущільнення диктується особливостями фізико-механічних явищ, котрі відбуваються у суміші. Вивчення умов трансформації сил сухого тертя у в'язке, причин виникнення пружних та дисипативних сил, механізму зниження в'язкості та інших питань реології бетонних/будівельних сумішей сприяє вирішенню багатьох технологічних задач і насамперед передбачає вибір раціональних режимів ущільнення.

Як правило, реологічні дослідження з бетонними розчинними сумішами проводяться у статичному стані чи в усталеному режимі коливань (навіть при їх ударно-вібраційному ущільненні). Відсутні дані про поведінку бетонних/будівельних сумішей протягом усього циклу ущільнення. У роботі [4] зроблено спробу оцінити реологічні властивості з використанням динамічного методу шляхом дослідження вільних затухаючих коливань системи взаємодії часточок заповнювача на етапах ущільнення, фазових співвідношень між деформаціями і напруженнями.

У роботах [12, 13] для опису пружних та в'язких властивостей використовують модель Максвелла. Саме така модель описує поведінку матеріалу, який має пружні властивості, але по суті є рідиною. Згідно з аксіомою реології [14], кожний реальний матеріал, зокрема й бетонна суміш, мають всі реологічні властивості, котрі проявляють себе залежно від умов процесу деформації (різною мірою).

Наведені у [4] дані свідчать про неперервну зміну реологічних властивостей бетонних/будівельних сумішей у процесах вібраційного/віброударного впливу й пояснюють особливості механізму ущільнення. Звідси випливає висновок про необхідність зміни параметрів коливань/удару на відповідних стадіях формування матеріалу, а підвищення власної частоти коливань системи у процесі ущільнення надає можливість управління процесами.

Метою роботи є виявлення розрахункових особливостей за ударного та імпульсного видів навантажень тіл (стрижнів), середовищ, які мають в'язкопружні властивості, шляхом розв'язання (коректного й послідовного) задачі удару жорсткого тіла по в'язкопружному стрижню скінченної довжини. Результати досліджень дають можливість (у разі досягнення мети) встановити зазначені можливості і для процесів вібраційного/віброударного ущільнення бетонних/будівельних сумішей, оскільки останні моделюються аналогічними засобами (як і амортизатори з еластичних, зокрема, гумово-металевих матеріалів).

Виклад основного матеріалу

1. Постановка задачі.

Удар жорстким тілом M_0 по вертикально розміщеному (рис. 1) стрижню завдовжки h з поперечним перерізом F зводиться до розв'язання інтегро-дифференціального рівняння:

$$E^* \cdot U_{xx} = C_{ю0}^{-2} \cdot \mathcal{U}, \quad (1)$$

де $U_{xx} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\mathcal{U} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $U(x, t)$ – переміщення у стрижні, яке є функцією просторової x та часової t координат, $C_{ю0}^2 = \frac{E}{\rho}$, E – модуль Юнга, ρ – щільність матеріалу стрижня, а E^* –

оператор, який визначається співвідношенням $E^*(\cdot) = (\cdot) - \int_0^t \Lambda(t-\xi) [\cdot(\xi)] d\xi$, – оператор в'язкопружності (для тіл Максвелла $\Lambda(t) = \beta \cdot e^{-\beta t}$). Рівняння (1) слід розв'язувати за граничних та початкових умов :

$$U|_{x=h} = 0, EF \cdot E^*(U, x)|_{x=0} = (-M_0 \cdot g - M_0 \cdot \mathcal{U})|_{x=0}, U|_{t=0} = 0,$$

$$\mathcal{U}|_{t=0} = \begin{cases} 0, 0 < x \leq h, \\ -V_0, x = 0 \end{cases}, \text{ де } \mathcal{U} \equiv \frac{\partial U}{\partial t}.$$

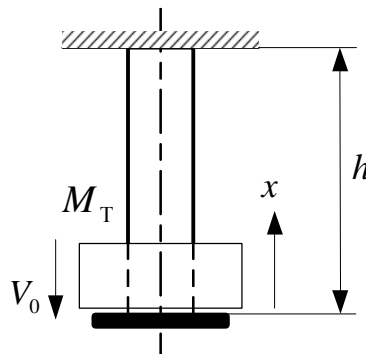


Рис. 1. Геометрія задачі

2. Розв'язання задачі (точне).

Постановка задачі не є стаціонарною, тому її розв'язок шукаємо у вигляді:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin\{p_n \cdot (x-h)\}, \quad (2)$$

де $\sin\{p_n \cdot (x-h)\}$ – власні функції пружної задачі про коливання горизонтально розміщеного стрижня з вантажем на кінці; p_n – власні частоти цієї задачі, які визначаються як корені трансцендентного рівняння:

$$p_n \cdot h \cdot \operatorname{tg}\{p_n \cdot h\} - \frac{m}{M_0} = 0, m = F \cdot \rho \cdot h. \quad (3)$$

Використовуючи принцип віртуальної роботи Лагранжа чи застосовуючи узагальнений метод Бубнова–Гальоркіна до рівняння (1), отримаємо неоднорідні інтегро-дифференціальні рівняння для визначення функцій $f_n(t)$:

$$f_n''(t) + \gamma_n^2 \cdot E^* \cdot f_n(t) = \Theta_n, \tag{4}$$

де $\gamma_n = p_n \cdot C_{\text{но}}$, $\Theta = \frac{2g \cdot \cos(p_n \cdot h)}{p_n \cdot h + \sin(p_n \cdot h) \cdot \cos(p_n \cdot h)}$.

З початкових умов задачі знаходимо:

$$f_n(0) = 0, f_n'(0) = \frac{2V_0 \cdot \cos(p_n \cdot h)}{(p_n \cdot h) + \sin(p_n \cdot h) \cdot \cos(p_n \cdot h)}. \tag{5}$$

Оскільки рівняння (4) – лінійне, то розв’язок $f_n(t)$ шукаємо у вигляді суми: розв’язку $f_{1n}(t)$ – однорідного рівняння (4) за початкових умов (5) й розв’язку $f_{2n}(t)$ – неоднорідного рівняння (4) за нульових початкових умов.

Перепишемо (4) у розгорнутому вигляді:

$$f_n''(t) + \gamma_n^2 \cdot f_n(t) - \gamma_n^2 \cdot \int_0^t \Lambda(t-\xi) \cdot f_n(\xi) d\xi = \Theta_n. \tag{6}$$

Використовуючи, наприклад, інтегральне перетворення Лапласа, можна показати, що точний розв’язок рівняння (6) має вигляд:

$$f_n(t) = \Psi_n(t) \cdot f_n'(0) + \Phi_n(t) \cdot f_n(0) + \int_0^t \Psi_n(t-\xi) \cdot \Theta_n \cdot d\xi, \tag{7}$$

де $\Psi_n(t)$ задовольняє однорідне рівняння (6) за початкових умов $\Psi_n(0) = 0, \Psi_n'(0) = 1$. Для $\Lambda(t) = \beta \cdot e^{-\beta t}$, тобто для моделі Максвелла, розв’язок (6) відповідає поведінці саме цієї моделі, резольвента котрої $\Lambda^*(t) = \beta$. Точний розв’язок однорідного рівняння (6) описується співвідношенням:

$$\Psi_n(t) = C_1 + \exp\left[\left(-\frac{\beta}{2}\right) \cdot t\right] \cdot \{C_2 \cos(\omega_1 t) + C_3 \sin(\omega_1 t)\}, \tag{8}$$

де $\omega_1^2 = \gamma_n^2 - \frac{\beta^2}{4}$, $C_{1,2,3}$ – const. З урахуванням початкових умов $\Psi_n(0) = 0, \Psi_n'(0) = 0, \Psi_n''(0) = 1$ отримаємо:

$$\Psi_n(t) = \frac{\beta}{\gamma_n^2} + e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \left\{ \frac{2\gamma_n^2 - \beta^2}{2\gamma_n^2 \cdot \omega_1} \cdot \sin(\omega_1 t) - \frac{\beta}{\gamma_n^2} \cos(\omega_1 t) \right\}. \tag{9}$$

Підставляючи (9) у (7), матимемо:

$$\begin{aligned} f_n(t) = & f_n'(0) \cdot \frac{\beta}{\gamma_n^2} + e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \left\{ f_n'(0) \cdot \frac{2\gamma_n^2 - \beta^2}{2\gamma_n^2 \cdot \omega_1} \cdot \sin(\omega_1 t) - f_n'(0) \cdot \frac{\beta}{\gamma_n^2} \cos(\omega_1 t) \right\} + \\ & + \frac{\beta \cdot \Theta_n}{2\gamma_n^2 \cdot \omega_1} \cdot \left(\frac{\beta^2}{\gamma_n^2} - \frac{3}{2} \right) \cdot e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \sin(\omega_1 t) + \frac{\Theta_n}{\gamma_n^2} \cdot \left(\frac{\beta^2}{\gamma_n^2} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \cos(\omega_1 t) + \\ & + \frac{\beta \cdot \Theta_n}{\gamma_n^2} \cdot t + \frac{\Theta_n}{\gamma_n^2} \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{\gamma_n^2} \right). \end{aligned} \tag{10}$$

3. Порівняльний аналіз наближених розв’язків задачі. Методи усереднення й заморожування.

Основна ідея, яку покладено в основу розв’язання рівняння (4) методами усереднення й заморожування, полягає у апроксимації точного розв’язку (10) рівняння (4) розв’язанням відповідно підбраного диференціального рівняння [5–8]. Так, розв’язок однорідного рівняння (4) при використанні методу усереднення має вигляд:

$$f_{1n}(t) = \Psi_{1n}(t) \cdot \cos(\gamma_n t) + \Psi_{2n}(t) \cdot \sin(\gamma_n t). \quad (11)$$

Функції $\Psi_{1n}(t)$, $\Psi_{2n}(t)$ знаходять за системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_{1n}(t) = \left(-\frac{\gamma_n}{2}\right) \cdot [L_{1n} \cdot \Psi_{1n}(t) + L_{2n} \cdot \Psi_{2n}(t)], \\ \dot{\Psi}_{2n}(t) = \left(\frac{\gamma_n}{2}\right) \cdot [L_{2n} \cdot \Psi_{1n}(t) + L_{1n} \cdot \Psi_{2n}(t)], \end{cases} \quad (12)$$

де L_{2n} , L_{1n} – косинус– та синус– перетворення ядра $\Lambda(t)$. При використанні методу заморожування розв'язок однорідного рівняння (4) апроксимують розв'язком диференціального рівняння:

$$\ddot{\mathcal{X}}_n(t) + \gamma_n \cdot L_{1n} \cdot \dot{\mathcal{X}}_n(t) + \gamma_n^2 \cdot (1 - L_{2n}) \cdot \mathcal{X}_n(t) = 0. \quad (13)$$

Слід зазначити, що метод усереднення дає менш точну апроксимацію шуканого розв'язку, ніж метод заморожування.

Слід зазначити, що безпосереднє застосування методу усереднення й одного з варіантів заморожування [9] до однорідного рівняння (4) приводить до втрати всіх ефектів, пов'язаних з повзучістю. Повніше ефекти, пов'язані з повзучістю, дає змогу враховувати варіант методу заморожування, викладений у [7, 8]. Ці результати обумовлені тим, що при вказаних підходах розв'язок неоднорідних інтегро-диференціальних рівнянь зводиться до інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь, при цьому звужується клас функцій, за котрими шукають розв'язок, і ефекти, пов'язані з повзучістю, з розв'язку можуть щезнути.

У випадку дослідження стаціонарного режиму при застосуванні методу усереднення (за відсутності резонансів) отримують пружний розв'язок, тоді як за допомогою методу заморожування визначають фізично правильний результат. При використанні безрозмірних величин $p_n \cdot h = \beta_n$, $\frac{C_{\text{н0}} \cdot t}{h} = \tau$ розв'язок однорідного рівняння (4) за методом усереднення набуває вигляду:

$$f_{1n}(\tau) = b^* \cdot A_n \cdot I_n^s(\tau), \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} I_n^s(\tau) &= e^{-h_n \cdot \tau} \cdot \sin(\omega_n \cdot \tau), \quad h_n = \frac{1}{2} \beta_n \cdot L_{1n}, \quad \omega_n = \beta_n \cdot \left(1 - \frac{L_{2n}}{2}\right), \\ b^* &= \frac{V_0 \cdot h}{C_{\text{н0}}}, \quad A_n = \frac{4 \cos(\beta_n)}{(2 - L_{2n}) \cdot \beta_n \cdot (\beta_n + \sin(\beta_n) \cdot \cos(\beta_n))}, \\ L_{1n} &= \int_0^{\infty} \Lambda(t) \cdot \sin(\beta_n \cdot \tau) d\tau, \quad L_{2n} = \int_0^{\infty} \Lambda(\tau) \cdot \cos(\beta_n \cdot \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

Під час розв'язання за методом заморожування необхідно зробити таку заміну: у формулах (14) та (15) $\left(1 - \frac{L_{2n}}{2}\right)$ слід замінити на $\left\{1 - L_{2n} - \left(\frac{L_{1n}}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$.

При виділенні квазістатичних складових розв'язок неоднорідного рівняння (4) за методом усереднення набуває вигляду:

$$f_{2n}(\tau) = a^* \cdot \left\{ B_n \cdot \left[1 + \int_0^{\tau} \Lambda^*(\tau - \xi) d\xi \right] - B_n \cdot I_n^{C1}(\tau) - C_n \cdot I_n^{S1}(\tau) \right\}, \quad (16)$$

де

$$I_n^{C1}(\tau) = I_n^C(\tau) + \int_0^\tau \Lambda^*(\tau - \xi) \cdot I_n^C(\xi) d\xi, \tag{17}$$

$$I_n^{S1}(\tau) = I_n^S(\tau) + \int_0^\tau \Lambda^*(\tau - \xi) \cdot I_n^S(\xi) d\xi,$$

$$a^* = \frac{g \cdot h^2}{C_{\text{н0}}^2}, C_n = \beta_n \cdot \frac{L_{1n}}{2 - L_{2n}}, \tag{18}$$

$$B_n = \frac{2 \cos(\beta_n)}{\beta_n^2 \cdot (\beta_n + \sin(\beta_n) \cdot \cos(\beta_n))}, I_n^C(\tau) = e^{-h_n \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_n \tau).$$

Розв'язок за методом заморожування отримаємо за допомогою розглянутих вище замін. Оскільки ці обчислення аналогічні, наведено тільки результати, знайдені методом усереднення. Об'єднуючи координатну та часову частини розв'язку задачі, згідно з (2) отримаємо такі розрахункові формули:

– для переміщень:

$$\frac{U}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{\beta_n \cdot h} \cdot [f_{1n}(\tau) + f_{2n}^*(\tau)]; \tag{19}$$

– для деформацій:

$$\varepsilon = r_1 \cdot N_1 f_{1n}(\tau) + \frac{V_0}{C_{\text{н0}}} \cdot \Psi^* + \tag{20}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[r_n \cdot N_n \cdot f_{1n}(\tau) + \frac{V_0}{C_{\text{н0}}} \cdot R_n \cdot U_n \right] + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cdot f_{2n}^*(\tau);$$

– для напружень:

$$\frac{\delta}{E} = r_1 N_1 f_{11}(\tau) + \frac{V_0}{C_{\text{н0}}} \cdot \Psi^* - \int_{\tau^*}^{\tau} \Lambda(\tau - \xi) \cdot \left[r_1 N_1 f_{11}(\xi) + \frac{V_0}{C_{\text{н0}}} \cdot \Psi^* \right] d\xi + \tag{21}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ r_n \cdot N_n \cdot f_{1n}(\tau) + \frac{V_0}{C_{\text{н0}}} \cdot R_n \cdot U_n - \int_{\tau^*}^{\tau} \Lambda(\tau - \xi) \cdot \left[r_n N_n f_{1n}(\xi) + \frac{V_0}{C_{\text{н0}}} \cdot R_n U_n \right] d\xi \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cdot \left[f_{2n}^*(\tau) - \int_{\tau^*}^{\tau} \Lambda(\tau - \xi) \cdot f_{2n}^*(\xi) d\xi \right];$$

– для швидкостей:

$$\frac{V}{C_{\text{н0}}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{h} \cdot [b^* \cdot N_n \cdot A_n \cdot \chi_n(\tau) + a^* \cdot B_n \cdot F_n \cdot I_n^{S^*}(\tau)]. \tag{22}$$

Тут

$$K_n = \beta_n \cdot \sin(C_n^*), C_n^* = \beta_n \cdot (d - 1), d = \frac{x}{h}, r_n = \frac{z'_n}{h}, z'_n = \beta_n \cdot \cos(C_n^*),$$

$$N_n = \frac{\sin\left(\frac{\beta_n}{2N}\right)}{\frac{\beta_n}{2N}}, F_n = \frac{L_{1n}^2 + (2 - L_{2n})^2}{2 - L_{2n}}, R_n = \frac{\sin\left[\frac{\pi(n-1)}{2(N-1)}\right]}{\frac{\pi(n-1)}{2(N-1)}}, \tag{23}$$

$$\Psi^* = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (\sin(n \cdot X_1^*) + \sin(n \cdot X_2^*)), X_1^* = \pi(1-d-\tau), X_2^* = \pi(d-1-\tau),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sin(n \cdot X^*) = \begin{cases} \frac{X^*}{2}, & -\pi < X^* < \pi, \\ \frac{X^*}{2} - \pi, & \pi < X^* < 3\pi, \end{cases},$$

$$U_n = \frac{2(-1)^2}{\pi(n-1)} \cos[(n-1)\pi(d-1)] \cdot \sin[(n-1) \cdot \pi n],$$

$$f_{2n}^*(\tau) = a^* \left\{ B_n \left[1 + \int_{\tau^*}^{\tau} \Lambda^*(\tau-\xi) d\xi - \right] \right\}, \quad I_n^C(\tau) = I_n^C(\tau) + \int_{\tau^*}^{\tau} \Lambda^*(\tau-\xi) \cdot I_n^C(\xi) d\xi,$$

$$\left[-B_n I_n^C(\tau) - C_n I_n^S(\tau) \right]$$

$$\chi_n(\tau) = (2 - L_{2n}) \cdot I_n^C(\tau) - L_{1n} \cdot I_n^S(\tau),$$

$$I_n^S = I_n^S(\tau) + \int_{\tau^*}^{\tau} \Lambda^*(\tau-\xi) \cdot I_n^S(\xi) d\xi, \quad \tau^* = \frac{C_{\text{н0}} \cdot t}{h}, \quad 0 \leq \tau^* \leq 1.$$

Ряди для напружень і деформацій покращують свою збіжність за допомогою застосування методу Куммера [15–17]. Покращання збіжності рядів (20), (21) за методом Куммера доцільно проводити лише для малих значень часу. Для великих значень часу ряди збігаються доволі швидко і у формулах (20) – (21) під час обчислення напружень і деформацій треба вважати $\Psi^* = U_n = 0$. Для зменшення осциляцій розв'язку поблизу точок розриву у ряди (20), (21) введено множник Ланцоша N_n [17]. Для перерізу стрижня $d = 0$ координатна частина розв'язку (2) дорівнює $-\sin(\beta_n)$. З рівняння (3) знаходимо:

$$\sin(\beta_n) = \frac{m \cdot \cos(\beta_n)}{M_{\text{0}} \cdot \beta_n}. \quad (24)$$

Підставляючи (24) у (19) й (22), для перерізу $d = 0$ отримаємо новий запис формул (19) та (22):

$$\frac{U}{h} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H'_n}{h} [f_{1n}(\tau) + f_{2n}(\tau)], \quad (25)$$

$$\frac{V}{C_{\text{н0}}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \cdot H'_n}{h} \cdot [b^* \cdot A_n \cdot \chi_n(\tau) + a^* \cdot B_n \cdot F_n \cdot I_n^{S1}(\tau)] \quad (26)$$

й розрахункову формулу для прискорення:

$$\frac{\dot{A} \cdot h}{C_{\text{н0}}^2} = b^* \cdot v'_1 \cdot A_1 \cdot N_1 \cdot H'_1 \cdot S_1^*(\tau) + \frac{v_0 \cdot m}{M_{\text{н0}} \cdot C_{\text{н0}}} \cdot \Psi^* +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[b^* \cdot v'_n \cdot A_n \cdot N_n \cdot H'_n \cdot S_n^*(\tau) + \frac{v_0 \cdot m}{M_{\text{н0}} \cdot C_{\text{н0}}} \cdot R_n U_n \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a^* \cdot v'_n \cdot N_n \cdot H'_n \cdot (2 - L_{2n}) \cdot [C_n I_n^S(\tau) - B_n I_n^C(\tau)] \right], \quad (27)$$

$$S_n^*(\tau) = L_{1n} (2 - L_{2n}) \cdot I_n^C(\tau) + \frac{1}{2} [(2 - L_{2n})^2 - L_{1n}^2] \cdot I_n^S(\tau),$$

$$H'_n = \frac{m \cdot \cos(\beta_n)}{M_{\text{0}} \cdot \beta_n}, \quad v'_n = \frac{\beta_n^2}{2h}.$$

Ряд для прискорень з введеним множником Ланцоша покращується за допомогою застосування методу Куммера. У випадку $V_0 = 0$ розрахункова формула для прискорень набуде вигляду:

$$\frac{\dot{A}}{g} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot K_n \cdot N_n \cdot F_n \cdot (2 - L_{2n}) \cdot [B_n \cdot I_n^* (\tau) - C_n \cdot I_n^{S**} (\tau)]. \quad (28)$$

Отримані вище залежності (19) – (27) за наявності V_0 справедливі тільки під час контакту між тілом й торцевим перерізом стрижня.

Використовуючи формули (21), (22), при $d = 0, M_\delta \cdot g = 0$ отримаємо розрахункову формулу для важливого параметра удару технічного коефіцієнта відновлення:

$$R = -\frac{v}{v_0} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot H'_n \cdot e^{-h_n \tau} \cdot [L_{1n} \cdot \sin(\omega_n \tau) - (2 - L_{2n}) \cdot \cos(\omega_n \tau)], \quad (29)$$

де τ – тривалість удару, яка визначається з умови, згідно з якою напруження (21) дорівнює нулю.

Отримані вище розрахункові формули при використанні температурно-часової аналогії дають змогу визначити характеристики ударного навантаження стрижнів також за різних температур навколишнього середовища.

Розглянута задача удару жорстким тілом по в'язкопружному стрижню при $M_\delta = 0$ переходить у задачу імпульсного навантаження, причому власні частоти β_n визначаються готовою формулою:

$$\beta_n = p_n \cdot h = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \mathbf{K}. \quad (30)$$

Випадок $M_\delta = \infty$ відповідає в'язкопружному стрижню з обома закріпленими кінцями, при цьому $\beta_n = (n-1)\pi$.

За допомогою коефіцієнта відновлення можна визначити енергію, поглинуту стрижнем під час удару:

$$E_i = (1 - R^2) E_0, \quad (31)$$

де E_0 – кінетична енергія тіла до удару.

4. Приклад розрахунку при використанні методу усереднення для розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь типу (4).

Розглянемо розтягуючий удар жорстким тілом по горизонтально розміщеному стрижню з поліпропілену. Для ядра Ржаніцина $\Lambda(\tau) = A \cdot e^{-\beta\tau} \cdot \tau^{\alpha'-1}$ ($0 < \alpha' < 1$) постійні L_{1n}, L_{2n} обчислюються за формулами:

$$\begin{cases} L_{1n} = \frac{A \cdot \tilde{A}(\alpha')}{(\beta^2 + \beta_n^2)^{\frac{\alpha'}{2}}} \cdot \sin \left\{ \alpha' \left[\arctg \left(\frac{\beta_n}{\beta} \right) \right] \right\}, \\ L_{2n} = \frac{A \cdot \tilde{A}(\alpha')}{(\beta^2 + \beta_n^2)^{\frac{\alpha'}{2}}} \cdot \cos \left\{ \alpha' \left[\arctg \left(\frac{\beta_n}{\beta} \right) \right] \right\}, \end{cases} \quad (32)$$

де $\tilde{A}(\alpha')$ – гамма-функція.

Параметри A, β, α' – ядра для поліпропілену наведено у роботі [18]. Для обчислення необхідного числа членів ряду розв'язок пружної задачі у рядах, котрий впливає з розв'язку в'язкопружної задачі як частинний випадок, порівнюється з точним розв'язком Сен-Венана [19]. (При ударі по жорсткому стрижню характеристики ударного навантаження $U, \varepsilon, \delta, v, \dot{A}$, а також час удару τ й коефіцієнт відновлення R залежать від співвідношення мас тіл, які здійснюють удар

одне з одним, тобто $\frac{m}{M_{\delta}}$. При ударі по в'язкопружному стрижню вони залежать від

співвідношення мас $\frac{m}{M_{\delta}}$, параметрів в'язкопружного матеріалу, а також від температури). При

утриманні у рядах 80 членів (при цьому обчислювались 80 коренів рівняння (3) для $\frac{m}{M_{\delta}} = \frac{1}{2}$)

отриманий наближений розв'язок, який практично збігається з точним. У випадку в'язкопружної задачі у рядах також утримувались по 80 складових.

На рис. 2 наведено епюри деформацій та напружень на ударному торці стрижня ($d = 0$), на рис 3 й 4 – значення швидкостей та прискорень у тому самому перерізі стрижня.

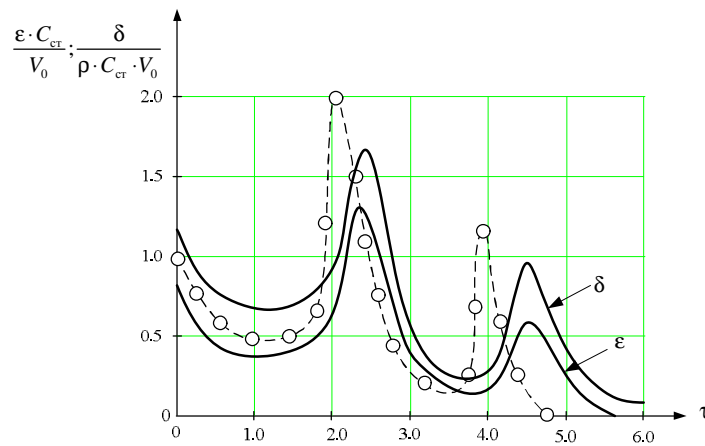


Рис. 2. Деформації/напруження на ударному торці стрижня ($d = 0$):

--- пружна задача, розв'язок Сен-Венана;
 ○ розв'язок у рядах;
 — розв'язок в'язкопружної задачі

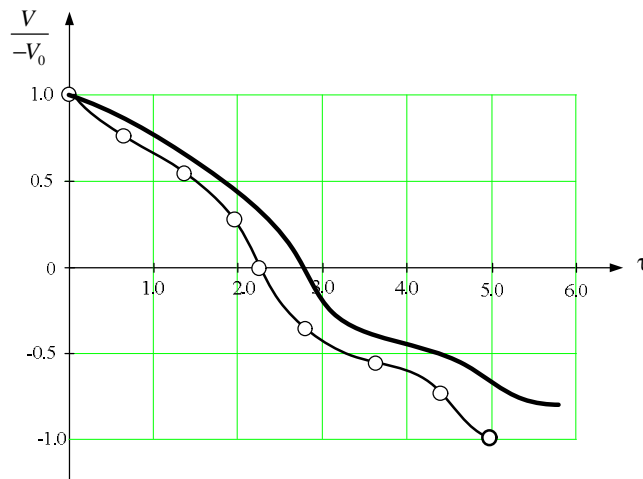


Рис. 3. Швидкості на ударному торці стрижня ($d = 0$):

--- пружна задача, розв'язок Сен-Венана;
 ○ розв'язок у рядах;
 — розв'язок в'язкопружної задачі

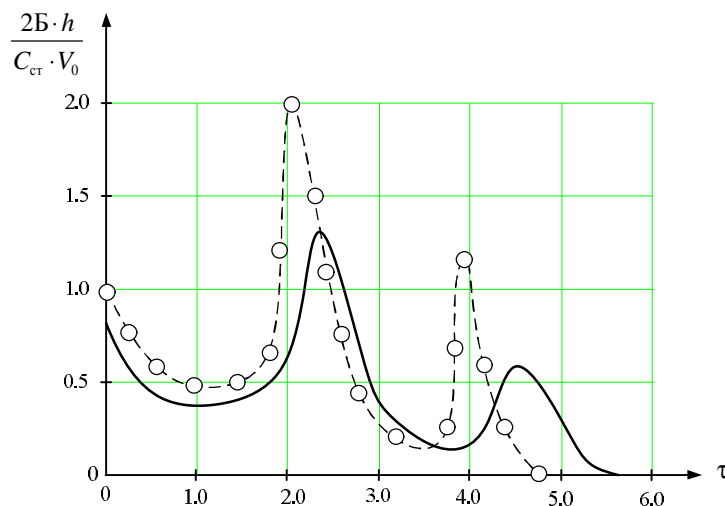


Рис. 4. Прискорення на ударному торці стрижня ($d = 0$):

--- розв'язок Сен-Венана;
 ○ ○ ○ ○ ○ ○ – розв'язок у рядах;
 ————— – розв'язок в'язкопружної задачі

Слід зазначити, що у в'язкопружній задачі внаслідок наближеного розв'язку рівняння (4) графіки напруження (див. рис. 2) й прискорення (див. рис. 4), побудовані у безрозмірних координатах, не збігаються (графік прискорення, зокрема, розміщений вище графіка напруження).

Стрибки деформацій, напружень та прискорень на фронті хвилі виділені при покращенні збіжності рядів за методом Куммера.

На рис. 2–4 розв'язок пружної задачі, отриманий Сен-Венаном, позначений пунктирною лінією, розв'язок у рядах – точками, розв'язок в'язкопружної задачі – суцільною лінією.

З поданих вище графіків видно, що для пружної задачі тривалість удару $\tau' = 4,798$, коефіцієнт відновлення швидкості $R = 0,925$; для в'язкопружної задачі (поліпропілен [18]) – відповідно $\tau' = 5,418$, $R = 0,834$.

Параметри ядра $\Lambda(\tau) = A \cdot e^{-\beta\tau} \cdot \tau^{\alpha-1}$ для поліпропілену визначені при $T^o, C = 30^o C$. Для температур, нижчих за $30^o C$, ядро, яке використовується у розрахунках, набуде вигляду:

$$\Lambda(\tau) = \frac{A}{a_T^{\alpha'}} \cdot e^{\frac{\beta\tau}{a_T}} \cdot \tau^{\alpha'-1}, \text{ а для температур понад } 30^o C - \Lambda(\tau) = A \cdot a_T^{\alpha'} \cdot e^{-\beta\tau a_T} \cdot \tau^{\alpha'-1}. \text{ Тут}$$

$$\lg a_T = \left| -\frac{a(T-T_0)}{b+(T-T_0)} \right|; T_0 = 30^o C; \text{ у першому наближенні } a = 8,86, b = 101,6^o C \text{ [20].}$$

Визначаючи коефіцієнт відновлення й тривалості, удару для температур, нижчих за $30^o C$, до формул для L_{1n}, L_{2n} необхідно замість A та β підставляти $\frac{A}{a_T^{\alpha'}}$ й $\frac{\beta}{a_T}$.

Розраховуючи коефіцієнт відновлення та тривалості удару при температурах, вищих за $30^o C$, до зазначених формул замість A та β необхідно підставляти $A \cdot a_T^{\alpha'}$ й $\beta \cdot a_T$.

Залежність коефіцієнта відновлення від температури навколишнього середовища наведено на рис. 5, а на рис. 6 – залежність тривалості удару від температури.

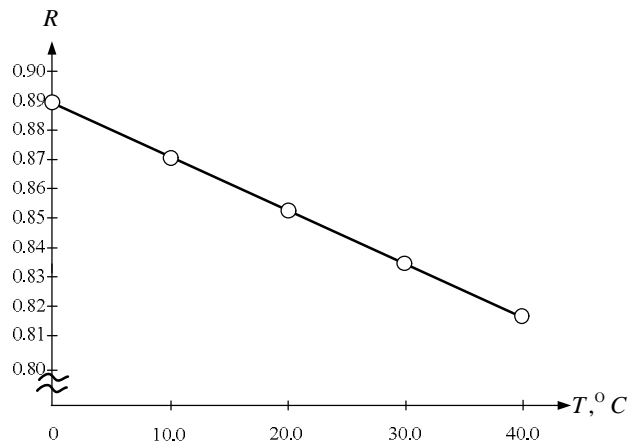


Рис. 5. Залежність коефіцієнта відновлення швидкості (R)
під час удару від температури ($T, ^\circ C$)

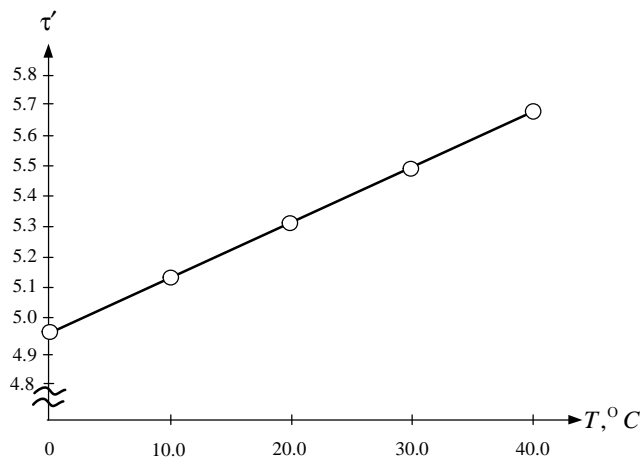


Рис. 6. Залежність тривалості удару (τ) від температури ($T, ^\circ C$)

Висновки

1. Отримано точний і наближений (методами усереднення й заморожування) розв'язки задачі удару жорсткого тіла по в'язкопружному стрижню скінченної довжини. Подібні моделі поширені під час аналізу взаємодії амортизаторів вібраційних машин зі збуджувачами коливань, а також під час розв'язання задач вібро- (ударного) ущільнення бетонних/будівельних сумішей.

2. Встановлені основні параметри удару: переміщення, деформація, швидкість і прискорення у довільному перерізі в'язкопружного (модель Максвелла) стрижня, тривалість удару, власні частоти, які збуджуються у ньому, коефіцієнт відновлення швидкості під час удару.

3. З наведених у роботі результатів числових розрахунків для матеріалу (поліпропілену) стрижня випливає, що зі збільшенням температури навколишнього середовища коефіцієнт відновлення швидкості під час удару (R) зменшується, а тривалість самого удару зростає. Зменшення R , своєю чергою, призводить до збільшення величини енергії, яка поглинається стрижнем під час удару (E_n). Подібні ефекти пов'язані з повнішим проявом в'язких властивостей поліпропілену, котрі й призводять до збільшення втрат енергії під час удару в самому тілі амортизатора й до зменшення швидкості розповсюдження у ньому фронту хвиль (хвилеутворень).

4. Отримані результати можуть надалі слугувати для вдосконалення й уточнення інженерних методів розрахунку амортизаторів вібраційних машин, які працюють у віброударному режимі формування бетонних/будівельних сумішей, а також стануть у нагоді для з'ясування основних закономірностей руху, фізики процесів ущільнення зазначених сумішей, які перебувають у в'язкопружному стані (модель Максвелла) й моделюються як системи з розподіленими параметрами.

1. Кокошвили С.М. Методы динамических испытаний жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 182 с. 2. Дымников С.И., Лавендел Э.Э., Папловскис А. – М.А., Сниегс М.И. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 238 с. 3. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К. Принцип минимума преобразованной энергии в динамических задачах линейной теории вязкоупругости // ДАН УССР. Серия А. – 1976. – №8. – С.712–715. 4. Афанасьев А.А. Исследование реологических свойств бетонных смесей динамическим методом // Технологическая механика бетона. – Рига: РПИ, 1979. – С.11-20. 5. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с. 6. Карнаухов В.Г. О приближенном методе решения динамических задач термовязкоупругости // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1972. – Вып. 12. – С.27–35. 7. Нгуен Ганн Ли. Об одном методе решения интегродифференциальных уравнений, встречающихся в динамике вязкоупругости // Механика полимеров. – 1978. – №5. – С.818–825. 8. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с. 9. Мальцев Л.Е. Приближенное решение некоторых динамических задач вязкоупругости // Механика полимеров. – 1978. – №2. – С. 210–218. 10. Десов А.Е. Некоторые вопросы структуры, прочности и деформации бетонов. – В кн.: Структура, прочность и деформации бетонов. – М.: Стройиздат, 1966. – 250 с. 11. Савинов О.А., Лавринович Е.В. Теория и методы вибрационного формования железобетонных изделий. – Л.: Стройиздат, 1972. – 320 с. 12. Завьялов М.А., Завьялов А.М. Возможная реологическая модель релаксации асфальтобетонной смеси при уплотнении // Строительные и дорожные машины. – 2002. – №7. – С.25–26. 13. Баловнев В.И. Моделирование процессов взаимодействия со средой рабочих органов дорожно-строительных машин. – М.: Высшая школа, 1981. – 335 с. 14. Рейнер М. Реология. – М.: Наука, 1965. – 224 с. 15. Карнаухов В.Г., Козлов В.И. Распространение нестационарных возмущений в вязкоупругой среде // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10. – №7. – С.36–41. 16. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Кучер Н.К. Динамическое поведение упругих и вязкоупругих подкрепленных полых цилиндров // Прикладная механика. – 1975. – Т. 11. – №8. – С.16–25. 17. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 400 с. 18. Колтунов А.А., Панишин Б.И., Колтунов М.А. Анализ нелинейной ползучести полимеров // Механика полимеров. 1969. – №3. – С.410–414. 19. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – К.: Наукова думка, 1976. – 311 с. 20. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Наука, 1976. – 277 с.