УДК:517.9

Б.І. СОКІЛ, Т.Є. ДАНИЛЕВИЧ

Національний університет "Львівська політехніка"

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ ВАЛ-ВАНТАЖ (ПОГЛИНАЧ КОЛИВАНЬ), ЗА НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНОГО ЗАКРІПЛЕННЯ ЙОГО ОПОР

Розглядається задача про нелінійні згинні коливання вертикального вала в системі вал-вантаж (поглинач коливань) за нелінійного закону пружності його матеріалу та податливості опор. В основу досліджень покладено принцип одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами та асимптотичний метод побудови розв'язків деяких класів нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Отримано співвідношення, які визначають вплив фізико-механічних параметрів та параметрів поглинача коливань на амплітудно-частотну характеристику коливань системи.

A task is examined about the nonlinear vibrations of bends of vertical billow in the system billow-load (absorber of vibrations) at the nonlinear law of resiliency of his material, and pliability of supports. In basis of researches principle of mono frequency vibrations in the nonlinear systems with many degrees of liberty and distributed parameters and asymptotic method of construction of decisions of some classes of nonlinear differential equalizations is fixed with partials of parts. Correlation is got which determine influence of physical -mechanical parameters and parameters of absorber of vibrations (mass is concentrated) on AFC description of vibrations of the system.

Актуальність. Створення все більш досконаліших технічних засобів, що є менш енерго- і металомісткими, надійними і довговічнішими, потребує вдосконалення і розроблення нових методів розрахунку на міцність елементів конструкції. В низці проблем механіки твердого тіла одне з центральних місць посідає проблема гасіння механічних коливань. До чинників, які в багатьох випадках визначають надійність експлуатації того чи іншого механізму чи приладу, належать поглинання енергії коливань, що супроводжують реальні механізми (елементи конструкцій) з неврівноваженими масами. Обертання останніх, як правило, спричиняє нелінійні коливання у системах. Нелінійність фізичних і геометричних параметрів є причиною не тільки кількісної, але і якісної зміни процесу, зокрема залежності частоти власних коливань від амплітуди, виникнення резонансних явищ тощо. У зв'язку з цим актуальним є прогнозування появи цих небажаних нелінійних режимів, які несуть небезпеку для машин і механізмів, особливо за значного збільшення швидкостей.

Постановка проблеми. У роботі для зниження динамічних зусиль у поперечній площині коливань вертикального вала, зумовлених неврівноваженими частинами і періодичними збуреннями, запропоновано встановлення пасивного поглинача коливань (додаткова маса), який частину енергії неврівноваженої системи поглинає.

Запропонована модель (рис. 1) включає пружний вал, який здійснює поперечні коливання і пасивний поглинач коливань, який знаходиться у верхній частині вала і вважається зосередженою масою, яка розміщена між кінцями пружин однакової жорсткості.

Динамічні процеси розглядуваного типу механічних систем вивчались в [1], де отримано диференціальні рівняння руху вказаної системи вал-поглинач коливань, а також знайдено математичні залежності, які визначають вплив геометричних і фізико-механічних параметрів на амплітудно-частотну характеристику власних коливань системи.

Мета роботи – дослідження впливу зовнішнього періодичного збурення, характеристик пасивного поглинача та способу закріплення на коливання вала. Диференціальні рівняння руху системи вал-поглиач коливавнь з врахуванням зовнішнього збурення можна привести до вигляду

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = \varepsilon \Phi(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}, u, u_x, u_{xx}, u_{xxt}, u_{xt}, \theta); \tag{1}$$

$$\ddot{\xi} + \xi \frac{2c}{M} = F_2(u, u_x, u_{tt}), \tag{2}$$

де функції, які входять у праві частини рівнянь, описані в [1], тільки $\Phi(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}, u, u_x, u_{xx}, u_{xxt}, u_{xt}, \theta)$ додатково враховує вплив зовнішніх періодичних збурень, тому вона є 2π-періодичною по аргументу $\theta = \mu t$; μ – частота зовнішнього періодичного збурення; ε – малий параметр, $\alpha^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EI_x}{\rho A}$; ρ – густина матеріалу вала; EI_x – жорсткість вала на згин; А – площа поперечного перерізу.

Враховуючи податливість опор, крайові умови мають складніший, ніж в [1], вигляд, а саме:

$$u(0,t) = 0,\ u(b,t) = 0,\ u_{xx}(0,t) = \varepsilon\left[h\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\right], u_{xx}(b,t) = -\varepsilon\left[h_1\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\right], \tag{3}$$

де α, α_1 і h, h_1 – коефіцієнти нелінійної і лінійної характеристик пружного закріплення опор вала.

В основу аналітичних досліджень диференціальних рівнянь (1), (2) покладено принцип одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами та асимптотичний метод побудови розв’язків деяких класів нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

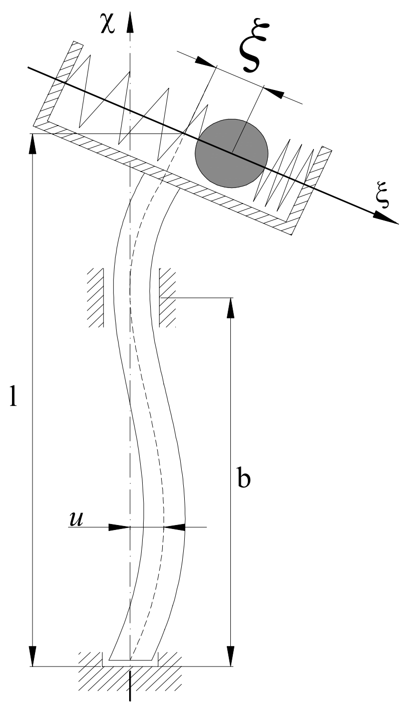

Рис. 1

Для реальних поглиначів коливань маса вантажу є малою величиною, тому у першому наближенні розв’язку задачі під час вивчення коливання поглинача за закон руху вала приймаємо закон, який відповідає його лініній математичній моделі.

Використовуючи вищеаведене, перейдемо до дослідження нелінійних коливань вала, тобто до побудови розв'язку рівняння (1). У нашому частковому випадку незбурена крайова задача має такий вигляд:

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0,$$
$$u(0,t) = 0,\ u(b,t) = 0,\ u_{xx}(0,t) = 0,\ u_{xx}(b,t) = 0.$$

Для її розв'язання використовуємо метод Фур'є, відповідно до якого функції, які визначають форми "динамічної рівноваги", мають вигляд $X(x) = \sin\frac{k\pi}{b}x$ і наділені властивостями повноти і попарної ортогональності на відрізку $[0,b]$.

Розглянемо тепер збурену крайову задачу (1), (3). Для цього досліджуємо одночастотні коливання в нестаціонарному режимі, близькому до нормальних коливань незбуреної системи в умовах проходження системи через головний резонанс.

Отже, відповідно із одночастотним методом [4] перше наближення асимптотичного розв'язку у формі, близькій до частоти вимушувальної сили можна записати у вигляді

$$u = a\sin\frac{k\pi x}{l}\cos(\theta+\varphi) + \varepsilon u_1(x,a,\psi,\theta) + \ldots, \tag{4}$$

де $\psi = \theta + \varphi$, а величини a і φ повинні бути визначені із систем диференціальних рівнянь:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a,\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega - \nu + \varepsilon B_1(a,\varphi). \tag{5}$$

У (4) і (5) функції $u_1(x,a,\psi,\theta)$, $A_1(a,\varphi)$ і $B_1(a,\varphi)$ – 2π -періодичні за кутовими змінним ψ, θ і φ.

Підставляючи (4) і (5) у вихідне рівняння (1) і крайові умови (3), після відомих перетворень [4] для першого наближення отримаємо крайову задачу (6) з лінійно неоднорідними крайовими умовами:

$$\begin{aligned} L(u_1) = \alpha^2\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}\omega^2 + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial\theta}\omega\nu + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}\nu^2 = \Phi(\xi,\dot\xi,\ddot\xi,u,u_x,u_{xx},u_{xxt},u_{xt},\theta) + \\ + X(x)\left\{\left[\left(\omega - \frac{p}{q}\nu\right)a\frac{\partial B_1}{\partial\varphi} + 2\omega A_1\right]\sin\psi - \left[\left(\omega - \frac{p}{q}\nu\right)\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - 2\omega a B_1\right]\cos\psi\right\}; \end{aligned} \tag{6}$$

$$u_1(0,a,\psi,\theta) = 0,\ u_{1xx}(0,a,\psi,\theta) = \left[h\frac{\partial X}{\partial x} + \alpha_1\left(a\frac{\partial X}{\partial x}\cos\psi\right)^3\right];$$

$$u_1(b,a,\psi,\theta) = 0,\ u_{1xx}(b,a,\psi,\theta) = -\left[h_1\frac{\partial X}{\partial x} + \alpha_1\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos\psi\right)^3\right]. \tag{7}$$

Для того, щоб функція $u_1(x,a,\psi,\theta)$ була розв'язком рівняння (6) і задовольняла крайові умови (7), подамо її у вигляді

$$u_1(x,a,\psi,\theta) = v_1(x,a,\psi,\theta) + w_1(x,a,\psi,\theta), \tag{8}$$

де $v_1(x,a,\psi,\theta)$ задовольняє однорідні крайові умови, що випливають із (7) $v_1\big|_{x=0,b} = 0$, $\left.\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right|_{x=0,b} = 0$, а допоміжна функція $w_1(x,a,\psi,\theta)$ знаходиться як розв'язок крайової задачі такого вигляду:

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} = 0,$$

$$w_1|_{x=0} = 0, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}|_{x=0} = \left[h\frac{\partial X}{\partial x}|_{x=0} + \alpha\left(a\frac{\partial X}{\partial x}|_{x=0} \cos\psi \right)^3 \right], \tag{9}$$

$$w_1|_{x=b} = 0, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}|_{x=b} = \left[h_1\frac{\partial w1}{\partial x}|_{x=b} + \alpha_1\left(a\frac{\partial X}{\partial x}|_{x=b} \cos\psi \right)^3 \right].$$

Легко перевірити, що розв'язком крайової задачі (9) є функція $w_1(x,a,\psi,\theta) = \sum_{i=0}^{3} C_i(a,\psi)x^i$:

$$C_1(a,\psi) = \frac{b\left\{ -2\alpha_1\left[\frac{k\pi}{b}\right]^3 + \alpha(4+h_1 b)\left[\frac{k\pi}{b}\right]^3 \right\}}{b(4h+4h_1+hh_1 b)+12} a^3\cos^3\psi; \tag{10}$$

$$C_2(a,\psi) = \frac{\left\{ -\alpha_1 hb\left[\frac{k\pi}{b}\right]^3 - 2\alpha(3+h_1 b)\left[\frac{k\pi}{b}\right]^3 \right\}}{b(4h+4h_1+hh_1 b)+12} a^3\cos^3\psi;$$

$$C_3(a,\psi) = \frac{\left\{ -\alpha_1(2+hb)\left[\frac{k\pi}{b}\right]^3 - \alpha(2+h_1 b)\left[\frac{k\pi}{b}\right]^3 \right\}}{b(b(4h+4h_1+hh_1 b)+12)} a^3\cos^3\psi.$$

Тоді для знаходження функції $v_1(x,a,\psi,\theta)$ отримаємо крайову задачу з однорідними крайовими умовами:

$$L(v_1) = \alpha^2\frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial\psi^2}\omega^2 + 2\frac{\partial^2 v_1}{\partial\psi\partial\theta}\omega\nu + \frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta^2}\nu^2 = \Phi(\xi,\dot{\xi},\ddot{\xi},u,u_x,u_{xx},u_{xxt},u_{xt},\theta) - \frac{\partial^2\omega_1}{\partial\psi^2}\omega^2 -$$
$$-2\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\psi\partial\theta}\omega\nu - \frac{\partial^2\omega_1}{\partial\theta^2}\nu^2 + X(x)\left\{\left[\left(\omega - \frac{p}{q}\nu\right)a\frac{\partial B_1}{\partial\varphi} + 2\omega A_1\right]\sin\psi - \left[\left(\omega - \frac{p}{q}\nu\right)\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - 2\omega a B_1\right]\cos\psi\right\}. \tag{11}$$

Після відомих перетворень згідно з [4] отримаємо диференціальні рівняння для знаходження закону зміни a і φ у випадку $\Phi(\xi,\dot{\xi},\ddot{\xi},u,u_x,u_{xx},u_{xxt},u_{xt},\theta) = F(\xi,\dot{\xi},\ddot{\xi},u_x,u_{xx},u_{xxt},u_{xt}) +$ $+F_r\sin\theta$:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a,\varphi) = -\frac{\varepsilon}{2\pi P_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}{}^*\Phi(u,\xi,\psi)\sin(\psi)\sin\frac{k\pi x}{l}dxd\psi - \frac{\varepsilon h_r P_2}{P_1}\cdot\frac{\cos\varphi}{\omega+\nu}; \tag{12}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon B_1(a,\varphi) = \omega - \nu - \frac{\varepsilon}{2\pi P_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}{}^*\Phi(u,\xi,\psi)\cos(\psi)\sin\frac{k\pi x}{l}dxd\psi - \frac{\varepsilon h_r P_2}{P_1}\cdot\frac{\sin\varphi}{\omega+\nu}, \tag{13}$$

де $P_1 = \int_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{b}dx$, $P_2 = \int_0^l \sin\frac{k\pi x}{b}dx$, $h_r = \frac{F_r}{\rho A}$, $\psi = \theta + \varphi$.

Примітка. Для випадку, коли нелінійно-пружні властивості матеріал вала задовольняють залежності

$$\sigma = \overline{E}\overline{\varepsilon} + k_1\overline{\varepsilon}^2\dot{\overline{\varepsilon}} + k_2\dot{\overline{\varepsilon}}^3, \tag{14}$$

що являє собою паралельне поєднання гуківського елемента з модулем пружності Е і нелінійного в'язкого елемента з коефіцієнтами $к_1>0$ і $к_2>0$, $\bar{\varepsilon} = u_x$ [2], система рівнянь (5) набуває такого вигляду:

$$\frac{da}{dt}=\frac{F\varepsilon\cos\varphi}{\omega+\nu}\frac{1-\cos\frac{k\pi l}{b}}{-\pi\left(\frac{b}{2}\sin 2k\pi\frac{l}{b}-k\pi l\right)}-Mb\varepsilon D_1 q\sin\varphi\frac{1-\cos{k\pi}/{b}}{2\pi({2c}/{m}-\omega^2)}-\frac{2k\pi}{\frac{b}{2}\sin\frac{2k\pi l}{b}+k\pi l}\Bigl(\frac{\varepsilon bF\sin\varphi}{2\pi k}\left(1-\cos\frac{k\pi l}{b}\right)-$$

$$-c_1a^3+Mk^2\pi\varepsilon a^2\frac{\cos^2({\pi kl}/{b}}{2}\left[\frac{\pi D_1}{4}\frac{\sin\varphi-\cos\varphi}{{2c}/{m}-\omega^2}-\pi D_3\frac{\cos^3\varphi+\frac{1}{4}\sin\varphi+\frac{3}{4}\cos\varphi}{{2c}/{m}-9\omega^2}-2\pi D_3\frac{\sin\varphi\cos\varphi^3}{{2c}/{m}-9\omega^2}\right]\times$$

$$\times\left(1-\cos\left(lk\frac{\pi}{b}\right)\right)-\frac{3a^3p_1\pi^8k^8\varepsilon}{8}\left[\frac{b}{4k\pi}\sin 2k\frac{l\pi}{b}-\frac{1}{8}-\frac{b}{144\cdot k\pi}\sin 4kl\frac{\vartheta}{b}\right]+ap_2\varepsilon k^4\frac{\pi^4}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{8k\pi}\sin 2k\pi\frac{l}{b}\right)+ap_3\varepsilon k^4\frac{\pi^4}{2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{8k\pi}\sin 2kl\frac{\pi}{b}\right);$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega-\nu+\frac{F\varepsilon\sin\varphi}{\omega+\nu}\frac{1-\cos\frac{k\pi l}{b}}{-\pi\left(\frac{b}{2}\sin 2k\pi\frac{l}{b}-k\pi l\right)}+\frac{2k\pi}{\frac{b}{2}\sin\frac{2k\pi l}{b}+k\pi l}\Bigl(\frac{\varepsilon bF\cos\varphi}{2\pi k}\left(1-\cos\frac{k\pi l}{b}\right)+ \qquad (15)$$

$$+Mk^2\pi q\varepsilon a^2\frac{\cos({k\pi l}/{b})^2}{4p}*\left[D_1(\cos\varphi+\frac{1}{4}\sin\varphi)+D_3(12\cos^3\varphi-9\cos\varphi+\sin\varphi\cos^2\varphi+\frac{1}{4}\sin\varphi)\right](1-\cos{k\pi}/{b})-$$

$$-c_2a^3-Mk^2\pi q\varepsilon a^2\frac{\cos({k\pi l}/{b})^2}{4p}D_2(\sin\varphi\cos^2\varphi+\frac{1}{4}\cos^2\varphi-\frac{1}{4})(1-\cos{k\pi}/{b}),$$

де D_1, D_2, D_3 – коефіцієнти, що описують фізико-механічні характеристики елементів моделі; c_1, c_2 – коефіцієнти, що враховують нелінійні і лінійні характеристики пружного закріплення опор.

На основі отриманих математичних залежностей побудовано амплітудно-частотні характеристики досліджуваної системи (рис. 2).

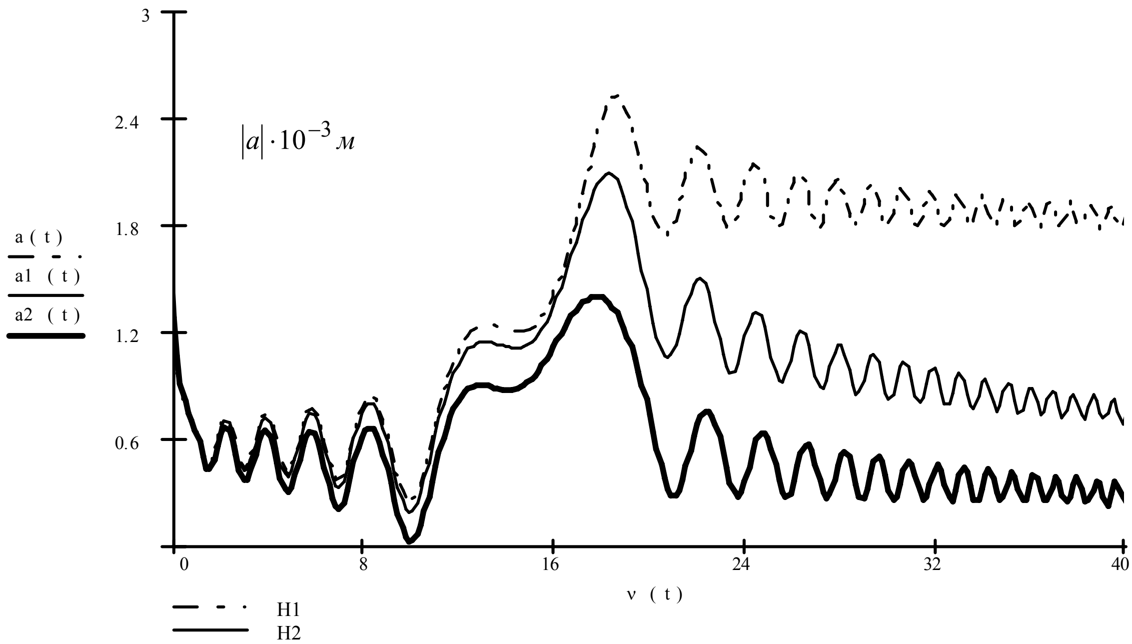

Рис. 2

На рис. 2 показано закони зміни амплітуди вимушених коливань вала за різних способів його закріплення: крива – $a(t)$ нерухомі опори; крива $a1(t)$ – рухомі опори ($h = 10\ м^{-1}$, $h_1 = 20\ м^{-1}$, $\alpha = 50\ м^{-1}$, $\alpha_1 = 100\ м^{-1}$); крива $a2(t)$ – рухомі опори ($h = 20\ м^{-1}$, $h_1 = 40\ м^{-1}$, $\alpha = 100\ м^{-1}$, $\alpha_1 = 200\ м^{-1}$).

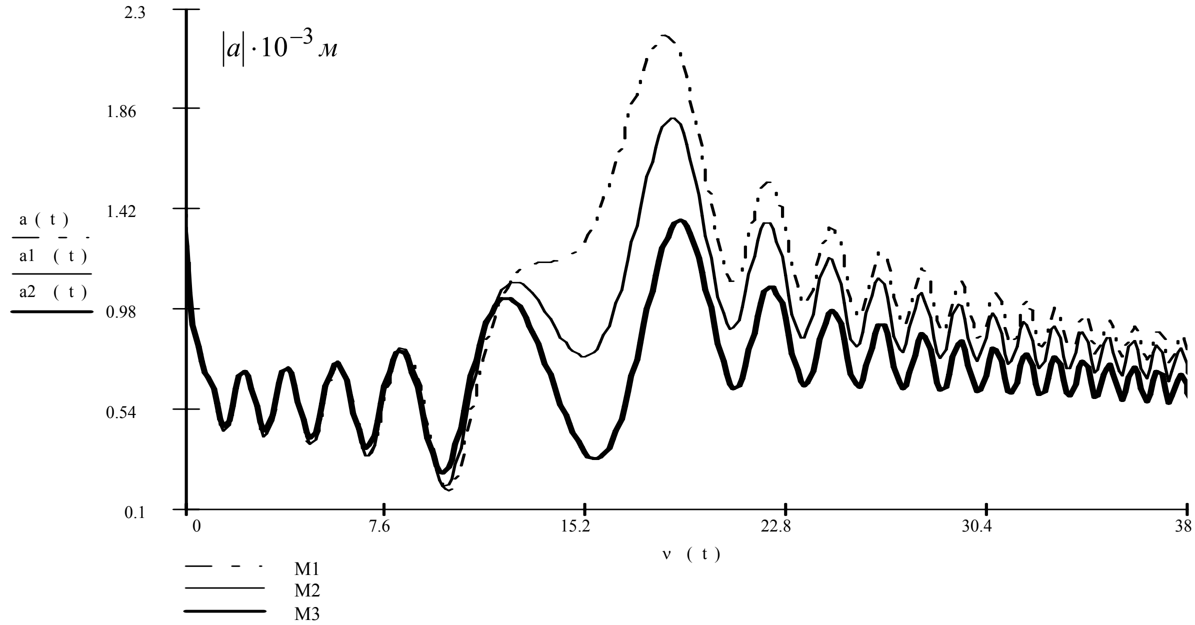

Рис. 3

На рис. 3 показано аналогічні характеристики коливань вала, проте для різних мас поглинача коливань (крива $a(t)$ – $M1 = 25\ кг$; крива $a1(t)$ – $M2 = 50\ кг$; крива $a2(t)$ – $M3 = 75\ кг$).

Висновки. Аналіз отриманої амплітудно-частотної характеристики системи під час проходження через резонансні значення частот зовнішньої збурювальної сили показує:

1. При збільшенні маси пасивного поглинача (додаткової маси) відбувається зменшення резонансного значення амплітуди коливань за певного значення коефіцієнтів нелінійної і лінійної характеристик пружного закріплення опор вала.

2. Збільшення від вищезгаданих коефіцієнтів приводить також до зменшення амплітуди коливань.

3. Зміна фізико-механічних властивостей матеріалу вала в незначний спосіб впливає на величину резонансного значення амплітуди.

1. Данилевич Т.Є., Сеник А.П. Нелінійні коливання одновимірних пружних систем і пасивні їх поглиначі // Вісник НУ "Львівська політехніка" "Автоматизаці виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні". – 2006. – Вип. 40. 2. Агафонов С.А., Георгиевский Д.В. Потеря устойчивости нелинейного вязкоупругого стержня под действием следящей силы. – К.: Вища шк., 2004. – 13 с. 3. Стеванович К.Р. Поперечные колебания балки, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием возмущающей силы с несколькими гармониками, с частотой, близкой к первой собственной // Математическая физика. – К.: Наукова думка,1973. – Вип. 13. 4. Митропольський Ю. А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с.