УДК 532.54.013.2

Р.М. Гнатів
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра гідравліки та сантехніки

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО НЕУСТАЛЕНИЙ РУХ РІДИНИ ПРЯМИМ МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА ЗА ДОПОМОГОЮ ДИСИПАТИВНОЇ МОДЕЛІ

На основі аналізу наукових робіт про нестаціонарний рух рідини в циліндричних трубах запропоновано розв’язувати прикладні задачі за ламінарного неусталеного руху прямим методом Канторовича за допомогою дисипативної моделі.

Ключові слова: неусталений, нестаціонарний, ламінарний.

On the basis of analysis of the advanced studies about unstationary motion of liquid in cylinder pipes, solution of the applied tasks is suggested at an unwithstand motion of laminar to conduct the direct method of Kantorovicha by a dissepative model.

Key words: unwithstand, unstationary, laminar.

Постановка проблеми. При проектуванні гідравлічних систем, де неусталений режим руху рідини в гідравлічних пристроях є визначальним, виникає необхідність математичного опису поведінки робочої рідини в проточній частині пристрою.

При теоретичному розв’язанні задач нестаціонарного руху рідини для практичних випадків в основних рівняннях, що описують цей рух у напірних трубах і каналах, з’являються особливі змінні, які враховують “турбулентний обмін”, а також локальні сили інерції, що діють на рідину. Вони впливають на явище переходу ламінарного режиму в турбулентний, а також на подальший розвиток турбулентності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. При виведенні математичних моделей у роботах Ібералла [1], Д′Суза, Олденбургера [2], Холмбоу, Руло [3], Джаясігхе, Лойтхойзера [4], Чарного [5], Попова [6] і Тійдемана [7] було введено припущення відносно порядку величини компонентів швидкості або зміни тиску. Нам при виведенні дисипативної моделі немає потреби вводити жодних припущень. Огляд відомих методів досліджень було наведено в працях [8–10]. На основі аналізу цих методів нами було запропоновано операційний метод розв’язання диференціальних рівнянь, що описують неусталений рух рідини.

Мета і задачі досліджень. Удосконалити методику розрахунку структур ламінарних неусталених потоків рідини.

Результати досліджень. Поряд з операційним методом було запропоновано ще один метод розв’язання задачі про неусталений рух рідини на основі дисипативної моделі, який за подальшого використання числових методів дає змогу отримати повний розв’язок задачі. Для дослідження було використано рівняння Нав’є-Стокса, рівняння нерозривності і рівняння стану [10]. Для використання цих рівнянь у безрозмірній формі було введено такі безрозмірні координати:

$$\xi' = \frac{z}{R}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \tau' = \frac{c}{R}t$$

безрозмірні змінні і коефіцієнти:

$$u'_\xi = \frac{V_z}{U_н}, u_\eta = \frac{V_r}{U_н}, \nu = \frac{R\theta}{U}, q = \frac{1}{c\rho U_н}p, \xi = \varepsilon\xi', \ \tau = \varepsilon\tau',$$
$$æ = \frac{1}{\varepsilon\beta}, \ \varepsilon = \frac{R}{L}, u_{\xi'} = u_\xi. \tag{1}$$

де R – радіус труби, $U_н$ – нормувальна швидкість, η – безрозмірна координата в радіальному напрямку; τ – безрозмірний час, ξ – безрозмірна повздовжня кордината; q – безрозмірний тиск, L – довжина труби. Саме за допомогою варіаційного методу Канторовича наведемо систему диференціальних рівнянь для функції трьох змінних – ξ, η, τ [2–4]:

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \tau} - æ\left(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta}u_\eta + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0. \tag{4}$$

до інтегрування безмежної системи диференціальних рівнянь для функції змінних – ξ, τ.

Розглянемо варіаційну задачу – знайти стаціонарне значення функціоналу (5).

$$I_0 = \frac{1}{2}\rho R^3 U_н^2 \langle \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial u_\xi}{\partial \tau} \times u_\xi - 2q \times \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + +æ\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \times \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} + u_\xi(\xi,\eta,0)u_\xi(\xi,\eta,\tau)\right]\eta\, d\eta\, d\xi — \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\frac{\partial q}{\partial \tau} \times \times q + [q(\xi,0) - 2q_0] \times q(\xi,\tau)\right\} d\xi - 2\int_0^1 [q^*(\tau) \times u_\xi(0,\eta,\tau) - q^{**}(\tau) \times u_\xi(1,\eta,\tau)]\eta\, d\eta\rangle. \tag{5}$$

Розв'язок сформульованої варіаційної задачі знаходимо у вигляді

$$u_\xi = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i(\xi,\tau) J_0(\lambda_i, \eta), \tag{6}$$

$$q = q(\xi,\tau), \tag{7}$$

де $\alpha_i(\xi,\tau), q(\lambda_i,\eta)$ шукані функції;

$J_0(\lambda_i, \eta)$ – функції Бесселя нульового порядку і

λ_i – корені рівняння

$$J_0(\lambda) = 0. \tag{8}$$

Видно, що через останню умову граничні умови $u_\xi = 0,\ u_\eta = 0$ при $\eta = 1$ задовільняються.

Підставляючи вирази (6), (7) у функціонал (5) отримаємо:

$$I = \int_0^1 \left\{\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2}[J_1(\lambda_i)]^2 \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} \times \alpha_i + æ\lambda_i^2 \alpha_i \times \alpha_i + \alpha_i(\xi,0)\alpha_i(\xi,\tau)\right] - 2\sum_{i=1}^\infty \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i} q \times \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial \tau} \times q - \frac{1}{2}[q(\xi,0) - 2q_0]q(\xi,\tau)\right\} d\xi - 2\sum_{i=1}^\infty \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i}[q^* \times \alpha_i(0,\tau) - q^{**} \times \alpha_i(1,\tau)]. \tag{9}$$

Умовами стаціонарності функціоналів (9) є диференціальні рівняння

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau} + æ\lambda_i^2 \alpha_i + \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)}\frac{\partial q}{\partial \xi} = 0, \tag{10}$$

$$2\sum_{i=1}^\infty \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0, \tag{11}$$

початкові і граничні умови

$$\alpha_i = 0, q = q_0 \quad \text{при} \quad \tau = 0; \tag{12}$$

$$q = q^* \quad \text{при} \quad \xi = 0; \tag{13}$$

$$q = q^{**} \quad \text{при} \quad \xi = 1. \tag{14}$$

Шукані функції можуть бути виражені через $\frac{\partial q}{\partial \xi}$, якщо розв'язувати рівняння (10), враховуючи початкову умову (12). Звідси маємо

$$\alpha_i = -\frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)}\int_0^\tau e^{-æ\lambda_i^2(\tau-\theta)} \times \frac{\partial^2 q(\xi,\theta)}{\partial \xi^2} d\theta = 0. \tag{15}$$

Підставляючи знайдені функції α_i, у рівнянні (11), отримуємо наступні інтегрально-диференціальні рівняння для визначення функції q

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} - 4\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 e^{-æ\lambda_i^2(\tau-\theta)} \times \frac{\partial^2 q(\xi,\theta)}{\partial \xi^2} d\theta = 0. \tag{16}$$

Якщо продиференціювати рівняння (16) по τ, його можна буде перетворити до вигляду

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} - 4æ\sum_{i=1}^\infty \int_0^\tau e^{-æ\lambda_i^2(\tau-\theta)} \times \frac{\partial^2 q(\xi,\theta)}{\partial \xi^2} d\theta = 0. \tag{17}$$

Введемо позначення:

$$k(\tau) = 4æ\sum_{i=1}^{\infty} e^{-æ\lambda_i^2\tau}. \quad (18)$$

Рівняння (16) приймає тепер кінцевий вигляд

$$\frac{\partial^2 q}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial\xi^2} - \int_0^\tau k(\tau-\theta)\frac{\partial^2 q(\xi,\theta)}{\partial\xi^2}d\theta = 0 \quad (19)$$

Знаючи розв'язок рівняння (19), можна легко визначити $\alpha_i(\xi,\tau)$ за формулою (15).

Складові вектори швидкості виражаються тоді через функції α_i формулами (6) і

$$u_\eta = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial\xi}[J_1(\lambda_i)\eta - J_1(\lambda_i\eta)]. \quad (20)$$

Середня швидкість, визначена за допомогою формул (6), вираховується за формулою

$$W = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i}\alpha_i(\xi,\tau). \quad (21)$$

Для наближеного значення розв'язку безмежної системи пов'язаних між собою рівнянь (10)÷(11) користуємось інтегральним методом, що дозволяє привести задачу до розв'язку безмежної системи незв'язаних рівнянь. З цією метою покажемо систему у вигляді:

$$\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial\tau^2} + æ\lambda_i^2\frac{\partial\alpha_i}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\alpha_i}{\partial\xi^2} = \frac{\lambda_i}{J_1(\lambda_i)}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k}\frac{\partial^2\alpha_k}{\partial\xi^2} + \frac{2}{\lambda_k}\frac{\partial^2 q_0}{\partial\xi\partial\tau}\right], \ (i=1,2,3\ldots) \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\left[J_1(\lambda_i)\frac{\partial\alpha_i}{\partial\xi} + \frac{2}{\lambda_i}\frac{\partial q_0}{\partial\tau}\right] = 0 \quad (23)$$

Тут використано співвідношення

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4}{\lambda_i^2} = 1\,. \quad (24)$$

З рівнянь (22)÷(23) видно, що один варіант ітераційного процесу для визначення послідовностей наближених розв'язків $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots$ і $q_{0_1}, q_{0_2}, \ldots$ заданий рівняннями

$$\frac{\partial^2\alpha_{is}}{\partial\tau^2} + æ\lambda_i^2\frac{\partial\alpha_{is}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\alpha_{is}}{\partial\xi^2} = \frac{\lambda_i}{J_1(\lambda_i)}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{\infty}\left[\frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k}\frac{\partial^2\alpha_{k,s-1}}{\partial\xi^2} + \frac{2}{\lambda_k}\frac{\partial^2 q_{0,s-1}}{\partial\xi\partial\tau}\right], \quad (25)$$

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial\xi} + \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)}\frac{\partial q_{0s}}{\partial\tau} = 0 \ \ (s=1,\,2,\,\ldots,\ i=1,\,2,\,\ldots) \quad (26)$$

де

$$\alpha_{i_0} = 0\,,\, q_{00} = 0 \ \ (i=1,2,\ldots) \quad (27)$$

Звідси в першому наближенні при s=1 отримуємо

$$\frac{\partial^2\alpha_{i1}}{\partial\tau^2} + æ\lambda_i^2\frac{\partial\alpha_{i1}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\alpha_{i1}}{\partial\xi^2} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial\alpha_{i1}}{\partial\xi} + \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)}\frac{\partial q_{01}}{\partial\tau} = 0\,, \ \ (i=1,2,\ldots) \quad (29)$$

Необхідно відмітити, що якщо рівняння наближеної моделі плоско паралельного потоку рідини в трубі показати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial\tau^2} - æ\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u_\xi}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial\xi^2} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial q_0}{\partial\tau} = 0, \quad (31)$$

і для їхнього розв'язання використати метод розподілення змінних, то розв'язок для m_x набуває вигляду (6)–(7), причому функція $a_i(x,t)$ визначається тими самими рівняннями (28)–(29). Відповідно, модель плоскопаралельного потоку може бути розглянута як перше наближення з використанням ітераційного методу для розв'язання диференціальних рівнянь дисипативної моделі.

Висновки. Запропоновано удосконалену методику розрахунку неусталених потоків рідини на основі дисипативної моделі. Вона дає змогу зробити висновок про можливість розв'язування задач про ламінарний нестаціонарний рух рідини прямим методом Канторовича.

1. Iberall A.S. Attennation of oscillatory pressures in instrument lines. J. Res. Nat. Bar. Stand, 1950,45, p. 85-108. 2. Д'Суза, Олденбургер. Динамическая характеристика гидравлических трубопроводов // Теор. осн. инж. расч. – М.: Мир, 1964. – №3. – С. 196–205. 3. Холмбоу Руло. Влияние вязкого трения на распространение сигналов в гидравлических линиях // Теор. осн. инж.

расч. – М.: Мир, 1967. – №1. – С. 202–209. 4. Джаясингхе Лойтхойзер. Гидравлический удар при условии ламинарного течения // Теор. осн. инж. расч. – М.: Мир, №2. – С. 229–236. 5. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – С. 296. 6. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. – М.: Машиностроение, 1977. – С. 185–249. 7. Tijdeman H. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. J. Sound Vibr., 1975, 39, No. 1, p. 1-54. 8. Гнатів Р.М. Експериментальні дослідження неусталених течій в трубах / Р.М. Гнатів, І.П. Вітрух // Промислова гідравліка і пневматика. – 2009. – №4 (26). – С. 28–31. 9. Гнатів Р.М. Дослідження методами візуалізації неусталеного руху плинниого середовища в трубопроводах гідравлічних систем / Р.М. Гнатів, І.Ф. Рип'як, В.В. Чернюк // Промислова гідравліка і пневматика. – 2010. – №1 (27). – С. 47–51. 10. Гнатів Р.М. Розв'язок задач неусталених рухів операційним методом на основі дисипативної моделі / Р.М. Гнатів, М.Й. Микитин // Промислова гідравліка і пневматика. – 2011. – №3 (33). – С. 53–55.

УДК 624.21

Б.Г. Гнідець[1], Р.Б. Гнідець[2], З.Б. Гнідець[3]
Національний університет "Львівська політехніка",
[1]кафедра мостів і будівельної механіки,
[2]кафедра реставрації і реконструкції архітектурних комплексів,
[3]ТзОВ "Барком", Львівська обл., Пустомитівський р-н, с. Підбірці

ЛЕГКОМОНТОВАНА УНІВЕРСАЛЬНА КАРКАСНА СИСТЕМА ДЛЯ МАЛОПОВЕРХОВОГО ЖИТЛОВОГО ТА ІНШОГО ІНДИВІДУАЛЬНОГО БУДІВНИЦТВА

Наведено результати розроблення нових конструктивно-технологічних систем для малоповерхового житлового та іншого індивідуального будівництва із застосуванням легкомонтованих збірно-розбірних каркасів.

Ключові слова: каркас, система, житлове будівництво, універсальний, легко монтований, вузли, мобільний.

The article is devoted to elaborated a new constructive - technological systems for the little-stories housing and others individual construction with applied the simple-mounting prefabricated and disassembling frameworks of building.

Key words: frame, system, housing, universal, easy-mounting, node, mobile.

Вступ. Постановка питання. Під час будівництва житлових, промислових і громадських будинків та будівель іншого призначення часто застосовують різні каркасні системи з використанням різних будівельних матеріалів: залізобетону, металу і дерева. При цьому з використанням залізобетону застосовують монолітні, збірні і збірно-монолітні конструкції каркасів, а металеві і дерев'яні конструкції збирають з елементів, виготовлених на заводах та підприємствах будівельних організацій або з елементів, виготовлених на місці будівництва.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Такі конструкції каркасів докладно описані в технічній літературі: монографіях, підручниках, посібниках, наукових статтях періодичних видань. Переважна більшість систем і конструкцій відомих каркасів з використанням різних матеріалів, описані в технічній літературі, мають такі недоліки, як: різнотипність елементів каркасів, складність монтажу і з'єднання елементів, сезонність виконання робіт, різнотипність технології виготовлення елементів, обмеженість щодо застосування їх для житлового та інших видів будівництва та ін. [1–6].