ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
**"Фізико-математичні науки"**
Вип.625 № 625, (2008) с. 20–26

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
**"Physical & mathematical sciences"**
Vol.625 No 625, (2008) 20–26

# НЕІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Г.Р. Торган

*Львівський національний університет імені Івана Франка*
*вул. Університетська 1, 79000, Львів, Україна*

*(Отримано 26 травня 2008 р.)*

Досліджено мішану задачу для одного параболічного рівняння четвертого порядку з другою похідною за часом і нестандартною нелінійністю. Отримано достатні умови існування локального і неіснування глобального узагальненого розв'язку.

**Ключові слова:** параболічне рівняння, мішана задача.

**2000 MSC:** 60J10

**УДК:** 517.95

В [1] досліджено мішану задачу для рівняння коливання пластинки

$$u_{tt} + \triangle^2 u + \gamma u_t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_i(u_{x_i}) = 0 \qquad (1)$$

в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ за $t > 0$, $\gamma \geq 0$. Встановлено умови існування і неіснування глобального розв'язку.

Подібні задачі розглянуті у [2]–[4]. Зокрема, у [2] отримано умови існування глобальних узагальнених і класичних розв'язків мішаної задачі для рівняння (1), а також вказано достатні умови вибуху розв'язку в скінченний момент часу.

У [5]–[8] розглянуто мішані задачі для деяких нелінійних параболічних рівнянь, досліджено поведінку при $t \to +\infty$ розв'язків в обмеженій за просторовими змінними області.

У цій роботі розглянуто рівняння вигляду (1), але з присутньою мішаною похідною за часом і просторовими змінними. Одержано достатні умови існування локального узагальненого розв'язку і умови, за яких не існує глобальний узагальнений розв'язок.

Нехай $\Omega$ – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $Q = \Omega \times (0,+\infty)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $x \in \Omega$.

В області $Q$ розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{t x_i})_{x_j} +$$

$$+ c(x) u_t + \sum_{i=1}^{n} (g_i(u_{x_i}))_{x_i} = 0 \qquad (2)$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \qquad (3)$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega \times (0,+\infty)} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega \times (0,+\infty)} = 0, \qquad (4)$$

де $\nu$ – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega \times (0,+\infty)$.

Надалі використовуватимемо банахові простори $L^r(\Omega)$, $r \in [1,+\infty)$ [[9], с. 37], $H^k(\Omega)$, $H_0^l(\Omega)$, $W_0^{1,r}(\Omega)$ $k,l \in \mathbb{N}$, $r \in [1,+\infty)$ [[9], с. 44].

Припустимо виконання таких умов:

**(A)**

$$D^\beta a_{ij}^{sl},\ D^\alpha a_{ij} \in L^\infty(\Omega),\ i,j,s,l \in \{1,...,n\},$$

де $|\beta| \leq 2$, $|\alpha| \leq 1$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{k_1} ... \partial_{x_n}^{k_n}}$, $k_1 + ... + k_n = |\alpha|$;

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq A_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2,\ A_1 > 0$$

для майже усіх $x \in \Omega$ і усіх $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,...,n\}$;

$$\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) \xi_{ij} \xi_{sl} \geq A_2 \sum_{i,j=1}^{k} |\xi_{ij}|^2,\ A_2 > 0$$

для майже усіх $x \in \Omega$ і усіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$;

$$a_{ij}^{sl}(x) = a_{sl}^{ij}(x)$$

майже для усіх $x \in \Omega$ і усіх $i,j,s,l \in \{1,...,n\}$;

**(G)**

$$c \in L^\infty(\Omega),\ c(x) \geq c_0$$

майже усюди в $\Omega$, $c_0 > 0$;

$$g_i \in C(\mathbb{R}),\ g_i \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}),\ |g_i(s)| \leq \gamma_1 |s|^q,$$

$$|g_i'(s)| \leq \gamma_2 |s|^{q-1}$$

для довільного $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і усіх $i \in \{1,...,n\}$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$.

**Означення 1.** Функцію $u \in L^2((0,T^*); H_0^2(\Omega)) \cap$ $\cap L^{q+1}((0,T^*); W_0^{1,q+1}(\Omega))$ таку, що $u_t \in L^2((0,T^*); H_0^2(\Omega))$,

$u_{tt} \in L^{\infty}((0,T^*); H_0^1(\Omega))$ для усіх $T^* \in (0,T)$ і задовольняє початкові умови (3) та інтегральну рівність

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[ u_{tt} v + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{t x_i} v_{x_j} +$$

$$+ c(x) u_t v - \sum_{i=1}^{n} g_i(u_{x_i}) v_{x_i} \Big] dx = 0 \qquad (5)$$

для майже усіх $t \in (0,T)$ і для довільних $v \in H_0^2(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$, називатимемо узагальненим розв'язком задачі (2)-(4) в області $Q_T$. Якщо $T = +\infty$, то розв'язок назвемо глобальним.

**Теорема 1.** Нехай *виконуються умови* ***(A)***, ***(G)*** *і, крім того,* $u_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$, $\big(g_i(u_{0x_i})\big)_{x_i} \in L^2(\Omega)$, $i \in \{1,...,n\}$, $1 < q < \dfrac{n}{n-2}$ *при* $n > 2$ *і* $q > 1$ *при* $n \in \{1,2\}$. *Тоді в області* $Q_T$ *існує узагальнений розв'язок задачі (2)-(4), причому число* $T$ *загалом залежить від коефіцієнтів і початкових умов задачі.*

□ *Доведення.* Оскільки простір $W_0(\Omega) = H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ – сепарабельний гільбертів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\varphi^h\}_{h\in\mathbb{N}}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $W_0(\Omega)$ збігається з цим простором. Крім того, $\{\varphi^h\}_{h\in\mathbb{N}}$ можна вибрати ортонормованою в просторі $L^2(\Omega)$.

Розглянемо функції $u^N(x,t) = \sum\limits_{h=1}^{N} c_h^N(t)\varphi^h(x)$, $N \in \mathbb{N}$, де $c_1^N, c_2^N, ...c_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int\limits_{\Omega} \Big[ u_{tt}^N \varphi^h + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^N \varphi_{x_s x_l}^h + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{t x_i}^N \varphi_{x_j}^h +$$

$$+ c(x) u_t^N \varphi^h - \sum_{i=1}^{n} g_i(u_{x_i}^N) \varphi_{x_i}^h \Big] dx = 0, \qquad (6)$$

$t \in [0,T)$,

$$c_h^N(0) = u_{0,h}^N, \ \big(c_h^N(0)\big)_t' = u_{1,h}^N, \qquad (7)$$

де

$$u_0^N(x) = \sum_{h=1}^{N} u_{0,h}^N \varphi^h, \ \|u_0^N - u_0\|_{W_0(\Omega)} \to 0,$$

$$u_1^N(x) = \sum_{h=1}^{N} u_{1,h}^N \varphi^h, \ \|u_1^N - u_1\|_{H_0^2(\Omega)} \to 0$$

при $N \to \infty$.

На підставі теореми Каратеодорі [[10], с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (6), (7), визначений на деякому проміжку $[0, h_N)$. З оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що $h_N = T$, де $T$ – деяке число, яке визначимо пізніше.

Домножимо (6) на $c_{ht}^N$, підсумуємо за $h$ від 1 до $N$ і проінтегруємо за $t$ від 0 до $\tau < T$. Отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[ u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^N u_{t x_s x_l}^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{t x_i}^N u_{t x_j}^N +$$

$$+ c(x)|u_t^N|^2 - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(u_{x_i}^N) u_{t x_i}^N \Big] dx dt = 0. \qquad (8)$$

Очевидно

$$J_1 := \int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^N u_t^N dx dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^N|^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} |u_t^N|^2 dx.$$

Згідно з умовою **(A)**

$$J_2 := \int\limits_{Q_\tau} \Big[ \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^N u_{t x_s x_l}^N +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{t x_i}^N u_{t x_j}^N \Big] dx dt \ge \frac{A_2}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^N|^2 dx -$$

$$- \frac{A_3 + 1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^N|^2 dx + A_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{t x_i}^N|^2 dx dt,$$

де $A_3 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j,s,l=1}^{n} |a_{ij}^{sl}(x)|^2$.

На підставі умови **(G)**

$$J_3 := \int\limits_{Q_\tau} c(x)|u_t^N|^2 dx dt \ge c_0 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dx dt,$$

$$J_4 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} g_i(u_{x_i}^N) u_{t x_i}^N dx dt \le \gamma_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N|^q u_{t x_i}^N dx dt \le$$

$$\le \frac{\gamma_1 \delta_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{t x_i}^N|^2 dx dt + \frac{\gamma_1}{2\delta_1} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N|^{2q} dx dt, \ \delta_1 > 0.$$

За теоремою Соболєва [[9], с. 47] для довільного $z \in H_0^2(\Omega)$

$$\Big( \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |z_{x_i}|^{2q} dx \Big)^{1/2q} \le C_1 \Big( \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} |z_{x_i x_j}|^2 dx \Big)^{1/2} \qquad (9)$$

при $q \le \dfrac{n}{n-2}$, якщо $n > 2$, і $q > 1$, при $n \in \{1,2\}$, $C_1$ – додатна константа, яка не залежить від $N$.

Враховуючи оцінки інтегралів $J_1 - J_4$ і оцінку (9), з (8) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Big[ |u_t^N|^2 + A_2 \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^N|^2 \Big] dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[ (2A_1 - \gamma_1 \delta_1) \sum_{i=1}^{n} |u_{t x_i}^N|^2 +$$

$$+ 2c_0 |u_t^N|^2 \Big] dx dt \le \int\limits_{\Omega_0} \Big[ |u_t^N|^2 + (A_3 + 1) \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^N|^2 \Big] dx +$$

$$+ \frac{\gamma_1 C_1}{\delta_1} \int\limits_0^\tau \Big( \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^N|^2 dx \Big)^q dt. \qquad (10)$$

Виберемо $\delta_1 < \dfrac{2A_1}{\gamma_1}$ і, використавши лему Біхарі [[11], с. 110], з (10) матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t^N|^2+\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^N|^2\right]dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2+\right.$$

$$\left.+|u_t^N|^2\right]dxdt\le\frac{C_4}{\left[1-(q-1)C_2^{q-1}C_3T\right]^{1/(q-1)}}\qquad(11)$$

при $T<T_1$, де $T_1=\dfrac{1}{(q-1)C_2^{q-1}C_3}$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ – додатні константи, які залежать від початкових даних і коефіцієнтів рівняння. Отже

$$||u^N||_{L^\infty((0,T_1);H_0^2(\Omega))}\le C_5,\ ||u_t^N||_{L^2((0,T_1);H_0^1(\Omega))}\le C_5,\qquad(12)$$

де стала $C_5$ не залежить від $N$.

Продиференціюємо (6) за $t$, отриману рівність домножимо на $c_{htt}^N$, підсумуємо за $h$ від 1 до $N$ і проінтегруємо за $t$ від 0 до $\tau$, де $\tau\in(0,T_1]$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[u_{ttt}^Nu_{tt}^N+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{tx_ix_j}^Nu_{ttx_sx_l}^N+c(x)|u_{tt}^N|^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{ttx_i}^Nu_{ttx_j}^N+\sum_{i=1}^{n}\left[(g_i(u_{x_i}^N)\right]_tu_{ttx_i}^N\right]dxdt=0.\qquad(13)$$

Подібно до оцінок $J_1-J_4$ маємо

$$J_5:=\int\limits_{Q_\tau}\left[u_{ttt}^Nu_{tt}^N+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{tx_ix_j}^Nu_{ttx_sx_l}^N+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{ttx_i}^Nu_{ttx_j}+c(x)|u_{tt}^N|^2\right]dxdt\ge\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_{tt}^N|^2+\right.$$

$$\left.+A_2\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2\right]dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[A_1\sum_{i=1}^{k}|u_{ttx_i}^N|^2+\right.$$

$$\left.+c_0|u_{tt}^N|^2\right]dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_{tt}^N|^2+(A_3+1)\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2\right]dx.$$

На підставі умови **(G)**

$$J_6:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left[g_i(u_{x_i}^N)\right]_tu_{ttx_i}^Ndxdt\le$$

$$\le\gamma_2\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^{q-1}u_{tx_i}^Nu_{ttx_i}^Ndxdt\le$$

$$\le\frac{\gamma_2\delta_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{ttx_i}^N|^2dxdt+\frac{\gamma_2(q-1)}{2q\delta_2^{2q/(q-1)}}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^{2q}dxdt+$$

$$+\frac{\gamma_2}{2q\delta_2^{2q}}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^{2q}dxdt,\ \delta_2>0.$$

Враховуючи отримані оцінки $J_5$, $J_6$ і (9), з (13) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_{tt}^N|^2+A_2\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2\right]dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[(2A_1-\gamma_2\delta_2)\sum_{i=1}^{n}|u_{ttx_i}^N|^2+\right.$$

$$\left.+2c_0|u_{tt}^N|^2\right]dxdt\le\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_{tt}^N|^2+(A_3+1)\sum_{i,j=1}^{n}|u_{1x_ix_j}^N|^2\right]dx+$$

$$+\frac{C_1\gamma_2(q-1)}{q\delta_2^{2q/(q-1)}}\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^N|^2dx\right)^qdt+$$

$$+\frac{C_1\gamma_2}{q\delta_2^{2q}}\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2dx\right)^qdt,\ \tau\in(0,T_1).\qquad(14)$$

Оцінимо $\int\limits_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2dx$. Домножимо рівність (6) на $c_{htt}^N(0)$ і підсумуємо за $h$ від 1 до $N$. Отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_{tt}^N|^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^Nu_{ttx_sx_l}^N+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{1x_i}^Nu_{ttx_j}^N+\right.$$

$$\left.+c(x)u_1^Nu_{tt}^N-\sum_{i=1}^{n}g_i(u_{0x_i}^N)u_{ttx_i}^N\right]dx=0.\qquad(15)$$

Оцінивши доданки рівності (15), матимемо

$$\int\limits_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2dx\le4\int\limits_{\Omega_0}\left[\sum_{i,j,s,l=1}^{n}\left|\left[a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^N\right]_{x_sx_l}\right|^2+\right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left|\left[a_{ij}(x)u_{1x_i}^N\right]_{x_j}\right|^2+\left|c(x)u_t^N\right|^2-$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\left|\left[g_i(u_{0x_i}^N)\right]_{x_i}\right|^2\right]dx\le C_6,$$

де $C_6$ – деяка константа, яка не залежить від $N$. Отже

$$I_1:=\int\limits_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2dx\le C_6,\ C_6>0.$$

Але з (12) маємо оцінку

$$I_2:=\int\limits_\Omega\left[|u_t^N|^2+\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^N|^2\right]dxdt\le C_5,$$

де $C_5$ – константа з (12), $\tau\in(0,T_1)$. Тому

$$\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^N|^2dx\right)^qdt\le C_7(\tau).$$

Вибравши $\delta_2<\dfrac{2A_1}{\gamma_1}$, можемо в нерівності (14) застосувати лему Біхарі. Отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_{tt}^N|^2+\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2\right]dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[\sum_{i=1}^{n}|u_{ttx_i}^N|^2+\right.$$

$$+|u_{tt}^N|^2\Big]dxdt \le \frac{2C_{10}(\tau)}{\left[1-(q-1)C_8^{q-1}C_9\tau\right]^{1/(q-1)}}$$

при $T < T_2$, де $T_2 = \dfrac{1}{(q-1)C_8^{q-1}C_9}$, $C_8$, $C_9$, $C_{10}$ – додатні константи, які залежать від початкових даних і коефіцієнтів рівняння.

Для $T < \min\left\{\dfrac{1}{(q-1)C_2^{q-1}C_3}; \dfrac{1}{(q-1)C_8^{q-1}C_9}\right\}$ маємо

$$||u^N||_{L^\infty((0,T_0);H_0^2(\Omega))} \le C_{11},$$

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T_0);H_0^2(\Omega))} \le C_{11},$$

$$||u_{tt}^N||_{L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega))} \le C_{11}, \qquad (16)$$

де стала $C_{11}$ не залежить від $N$, $T_0 \in (0,T)$.

Зазначимо, що

$$\int\limits_{Q_{T_0}} \sum_{i=1}^n \left|g_i(u_{x_i}^N)\right|^r dxdt \le C_{12},\ r>1, \qquad (17)$$

$T_0 \in (0,T),\ r = 1+\alpha_0$, де $\alpha_0 > 0$ визначаємо з умови $q(1+\alpha_0) < \dfrac{2n}{n-2}$ при $n > 2$ і $\alpha_0 > 0$ довільне при $n \in \{1,2\}$, $C_{12}$ – не залежить від $N$.

Отже, на підставі (16), (17) існує підпослідовність $\{u^{N_m}\}_{N_m\in\mathbb{N}} \subset \{u^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ така, що

$u^{N_m} \to u$ $*$ - слабко в $L^\infty((0,T_0);H_0^2(\Omega))$,

$u_t^{N_m} \to u_t$ $*$ - слабко в $L^\infty((0,T_0);H_0^2(\Omega))$,

$u_{tt}^{N_m} \to u_{tt}$ слабко в $L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega))$,

$g_i(u_{x_i}^{N_m}) \to \chi_i$ слабко в $L^r(Q_{T_0})$ при $N_m \to \infty$, $i \in \{1,...,n\}$.

Оскільки $H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ компактно, то можемо вважати, що $u^{N_m} \to u$ сильно в $L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega))$ і майже всюди в $Q_{T_0}$. Тому $g_i(u_{x_i}) = \chi_i$, $i \in \{1,...,n\}$.

Домножимо (6) на $d_h \in C^1([0,T_0])$, підсумуємо за $h$ від 1 до $N$ і проінтегруємо за $t$ від 0 до $T_0$. Нехай $\eta^N = \sum\limits_{h=1}^N d_h(t)\varphi^h(x)$, тоді отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{T_0}}\Big[u_{tt}^{N_m}\eta^N + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^{N_m}\eta_{x_sx_l}^N + c(x)u_t^{N_m}\eta^N +$$

$$+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{tx_i}^{N_m}\eta_{x_j}^N - \sum_{i=1}^n g_i(u_{x_i}^{N_m})\eta_{x_i}^N\Big]dxdt = 0. \quad (18)$$

У (18) перейдемо до границі при $N_m \to \infty$, $N_m > N$

$$\int\limits_{Q_{T_0}}\Big[u_{tt}\eta^N + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\eta_{x_sx_l}^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{tx_i}\eta_{x_j}^N +$$

$$+c(x)u_t\eta^N - \sum_{i=1}^n g_i(u_{x_i})\eta_{x_i}^N\Big]dxdt = 0.$$

Сукупність усіх $\eta^N$ позначимо через $\mathfrak{M}_N$. Оскільки $\bigcup\limits_{N=1}^\infty \mathfrak{M}_N$ щільна в $L^2((0,T_0);H_0^2(\Omega))$, то можемо перейти до границі і при $N \to \infty$. Отримаємо рівність з означення узагальненого розв'язку. ■

Введемо позначення

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\Big]dx -$$

$$-\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n G_i(u_{x_i})dx,\ G_i(s) = \int\limits_0^s g_i(\tau)d\tau. \qquad (19)$$

**Лема 1.** Нехай *$u$ – узагальнений розв'язок задачі (2)-(4) і $E(0) < 0$. Тоді $E(t) < 0$ для усіх $t > 0$.*

□ *Доведення.* Продиференціюємо (19) при $t$ :

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t}\Big[u_tu_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l} - \sum_{i=1}^n g_i(u_{x_i})u_{tx_i}\Big]dx.$$

Але з рівності (5) при $v = u_t$ маємо

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_tu_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{tx_j} +$$

$$+c(x)u_t^2 - \sum_{i=1}^n g_i(u_{x_i})u_{tx_i}\Big]dx = 0.$$

Тому

$$E'(t) = -\int\limits_{\Omega_t}\Big[c(x)u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{tx_i}u_{tx_j}\Big]dx \le$$

$$\le -\int\limits_{\Omega_t}\Big[c_0u_t^2 + A_1\sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2\Big]dx.$$

З останньої оцінки випливає, що $E'(t) < 0$. Отже,

$$E(t) < 0.$$

■

**Теорема 2.** Нехай *виконуються умови **(A)**, **(G)**, $g_i(s)s - \beta G_i(s) \ge \gamma_0|s|^{q+1}$, $\gamma_0 > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $\beta > 2$. Якщо $1 < q \le \dfrac{n+2}{n-2}$ при $n > 2$, $q > 1$ при $n \in \{1,2\}$ і $E(0) = -\lambda < 0$, то не існує глобального розв'язку задачі (2)-(4).*

□ *Доведення.* Припустимо, що $u$ – глобальний розв'язок задачі (2)-(4). Введемо

$$H(t) = -E(t),\ L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} uu_t dx.$$

Тоді

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Big[uu_{tt} + u_t^2\Big]dx.$$

Але правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_{tt}u + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{x_j} +$$

$$+c(x)uu_t - \sum_{i=1}^{n} g_i(u_{x_i})u_{x_i}\Bigg]dx = 0,$$

тому

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_t^2-$$

$$-\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{x_j} - c(x)u_tu+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} g_i(u_{x_i})u_{x_i}\Bigg]dx + \beta\varepsilon H(t) + \frac{\beta\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_t^2+$$

$$+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\Bigg]dx - \beta\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} G_i(u_{x_i})dx =$$

$$= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega_t} u_t^2dx+$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}dx-$$

$$-\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{x_j} + c(x)u_tu\Bigg]dx+$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}\Big[g_i(u_{x_i})u_{x_i} - \beta G_i(u_{x_i})\Big]dx.$$

Оцінимо доданки останньої рівності:

$$J_7 := \int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}dx \geq$$

$$\geq A_2\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_ix_j}^2dx,$$

$$J_8 := \int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}\big(g_i(u_{x_i})u_{x_i} - \beta G_i(u_{x_i})\big)dx \geq$$

$$\geq \gamma_0\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx,$$

$$J_9 := \int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{x_j}dx \geq$$

$$\geq -\frac{A_4\delta_4}{2}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2dx - \frac{1}{2\delta_4}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} u_{tx_i}^2dx,$$

де $A_4 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(x)|^2,\ \delta_4 > 0,$

$$J_{10} := \int\limits_{\Omega_t} c(x)u_tudx \geq -\frac{c_1\delta_4}{2}\int\limits_{\Omega_t} u^2dx - \frac{1}{2\delta_4}\int\limits_{\Omega_t} u_t^2dx,$$

де $c_1 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q}|c(x)|^2$.

Приймемо $\delta_4 = H^\alpha(t)\delta_5,\ \delta_5 > 0$ і, використовуючи нерівність Фрідріхса, теорему вкладення Соболєва і оцінку $H(t) \leq \int\limits_{\Omega_t}\sum\limits_{i=1}^{n} G_i(u_{x_i})dx$, отримаємо

$$H^\alpha(t)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2dx \leq \left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} G_i(u_{x_i})dx\right)^\alpha\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2dx \leq$$

$$\leq \frac{aC_{13}}{q+1}\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right)^\alpha\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right)^{\frac{2}{q+1}} =$$

$$= \frac{aC_{13}}{q+1}\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right)^{\frac{\rho}{q+1}},$$

$$H^\alpha(t)\int\limits_{\Omega_t} u^2dx \leq \left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} G_i(u_{x_i})dx\right)^\alpha\int\limits_{\Omega_t} u^2dx \leq$$

$$\leq \frac{aC_{14}}{q+1}\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right)^\alpha\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^{q+1}dx\right)^{\frac{2}{q+1}} \leq$$

$$\leq \frac{aC_{15}}{q+1}\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right)^\alpha\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right)^{\frac{2}{q+1}} =$$

$$= \frac{aC_{15}}{q+1}\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right)^{\frac{\rho}{q+1}},$$

де $\rho = 2+\alpha(q+1),\ \alpha \leq \dfrac{q-1}{q+1},\ C_{13},\ C_{14},\ C_{15}$ – додатні константи.

Якщо $\int\limits_{\Omega_t}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx \geq 1$, то

$$\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right)^{\frac{\rho}{q+1}} \leq \int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx.$$

Якщо $\int\limits_{\Omega_t}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx < 1$, то

$$\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right)^{\frac{\rho}{q+1}} \leq \left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right)^{\frac{2}{q+1}} \leq$$

$$\leq C_{16}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}|^2dx$$

при $q \leq \dfrac{n+2}{n-2},\ n > 2,\ C_{16} > 0$.

Враховуючи отримані оцінки, маємо

$$L'(t) \geq H^{-\alpha}(t)\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\left((1-\alpha)c_0 - \frac{1}{2\delta_5}\right)u_t^2+$$

$$+\left(A_1(1-\alpha) - \frac{1}{2\delta_5}\right)\sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_j}^2\Bigg] + \varepsilon\beta H(t)+$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\beta}{2}+1\right)\int\limits_{\Omega_t} u_t^2dx+\varepsilon\left[\left(\frac{\beta}{2}-1\right)A_2-\right.$$

$$\left.-\frac{C_{16}C_{15}ac_1\delta_5}{2(q+1)}-\frac{C_{16}C_{13}aA_4\delta_5}{2(q+1)}\right]\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_ix_j}^2dx+$$

$$+\varepsilon\left(g_0-\frac{A_4C_{13}a\delta_5}{2(q+1)}-\frac{c_2C_{15}a\delta_5}{2(q+1)}\right)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx$$

при $\beta>2$.

Виберемо $\min\left\{\frac{1}{2c_0(1-\alpha)};\frac{1}{2A_1(1-\alpha)}\right\}<\delta_5<\min\left\{\frac{(\beta-2)(q+1)A_2}{C_{16}a(C_{15}c_1+C_{13}A_4)};\frac{2g_0(q+1)}{a(C_{15}c_1+C_{13}A_4)}\right\}$, тоді

$$L'(t)\geq C_{17}\left[H(t)+\int\limits_{\Omega_t}u_t^2dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_ix_j}^2dx+\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}dx\right], \qquad (20)$$

де $C_{17}$ – додатна константа.

Розглянемо

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[H(t)+\varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}\left|\int\limits_{\Omega_t}uu_tdx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right].$$

Оцінимо доданки останньої нерівності

$$J_{11}:=\left|\int\limits_{\Omega_t}uu_tdx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq\left(\int\limits_{\Omega_t}u^2dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega_t}u_t^2dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\leq M_0\left(\int\limits_{\Omega_t}u^{q+1}dx\right)^{\frac{1}{(q+1)(1-\alpha)}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega_t}u_t^2dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\leq\widehat{M_0}\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^{q+1}dx\right)^{s}+\widehat{M_0}\int\limits_{\Omega_t}u_t^2dx,$$

де $M_0>0$, $\widehat{M_0}>0$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{2(1-\alpha)}=1\Rightarrow\frac{1}{s}=\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}$, $\frac{s}{(1-\alpha)}=\frac{2}{(1-2\alpha)}\leq q+1\Rightarrow\alpha\leq\frac{q-1}{2(q+1)}$.

Тоді, враховуючи попередні оцінки, матимемо

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq$$

$$\leq C_{18}\left(H(t)+\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}+\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}|^2+u_t^2\right]dx\right),$$

де $C_{18}>0$. Нехай $E(0)=-\lambda$, $H(0)=\lambda$, $H'(t)\geq0\Rightarrow H(t)\geq\lambda$. Зменшивши за потреби $\varepsilon$, можемо вважати, що

$$L(0)=H^{1-\alpha}(0)+\varepsilon\int\limits_{\Omega}u_0u_1dx\geq\frac{\lambda}{2},$$

тоді, беручи до уваги (20), отримаємо

$$L'(t)\geq C_{18}[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (21)$$

Позначимо $\sigma_0=\frac{1}{1-\alpha}$, $\sigma_0>1$. Проінтегруємо обидві частини нерівності (21) за $\tau$ від 0 до $t$. Матимемо

$$L^{\sigma_0-1}(t)\geq\frac{1}{L^{1-\sigma_0}(0)-C_{18}(\sigma_0-1)t}.$$

Отже, існує таке скінченне $T>0$, для якого $\lim\limits_{t\to T-0}L(t)=+\infty$, а тому

$$\lim_{t\to T-0}\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{q+1}+\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}|^2+u_t^2\right]dx=+\infty.$$

Одержана суперечність завершує доведення теореми. ■

**Приклад.** Наведемо деякі приклади функції $g_i(s)$, які задовольняють умови теореми:

$$1)\ \ g_i(s)=\begin{cases}\alpha_is^{1+\sigma},\ s\geq q0,\\ -\rho_is^{1+\sigma},\ s<0,\ \sigma>0,\end{cases}\quad \alpha_i>0,\ \rho_i>0,\ \sigma>0;$$

$$2)\ \ g_i(s)=\alpha_i|s|^{p-2}s,\ \alpha_i>0,\ p>2.$$

## Висновки

Отже, в роботі отримано достатні умови існування локального і неіснування глобального розв'язку при $t\to+\infty$ мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку з другою похідною за часом.

## Література


[1] Zhijian Yang. Global existence, asymptotic behavior and blowup of solutiond for a class of nonlinear wave equations with dissipative term // J. Differential Equations. – 2003. – 187. – P. 520-540.

[2] L.J. An, A. Peirce. A weakly nonlinear analysis of elasto-plastic-microstructure models // SIAM J. Appl. Math. – 1995. – 55 – P. 136-155.

[3] Guowang Chen, Zhijian Yang. Existence and non-existence of global solutions for a class of nonlinear wave equations // Math. Methods Appl. Sci. – 2000. – 23. – P. 615-631.

[4] Hongwei Zhang, Guowang Chen. Potential well method for a class of nonlinear wave equations of forth-order //

Acta Math. Sci. Ser. A. – 2003. – 23. – №6. – P. 758-768 (in Chinese).

[5] M. Tsutsumi. On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space // Math. Japan. – 1972. – 17. – P. 173-193.

[6] M. Tsutsumi. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations // Publ. RTMS. – 1972/73. – 8. – P. 211-229.

[7] Yacheng Liu, Junsheng Zhao. Nonlinear parabolic equations with critical initial conditions $J(u_0) = d$ or $I(u_0) = 0$ // Nonlinear Anal. – 2004. – 58. – P. 873-883.

[8] Лавренюк С.П., Торган Г.Р. Необмеженість розв'язків у скінченний момент часу одного слабко нелінійного рівняння четвертого порядку // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – 50. – №3. – С. 88-93.

[9] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

[10] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

[11] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1967.

## NONEXISTENCE OF THE GLOBAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR NONLINEAR FOURTH ORDER PARABOLIC EQUATION

H.R. Torhan

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1 Universytetska Str., 79001, Lviv, Ukraine*

In the paper there are investigate the initial boundary value problem for one parabolic equation forth order with second time derivative and with nonstandard nonlinearity. There are obtained conditions existence of the local and nonexistence of the global solution.

**Keywords:** parabolic equation, initial boundary value problem.

**2000 MSC:** 60J10

**УДК:** 517.95