УДК 681.325

Ю.В. ЧОВНЮК, К.І. ПОЧКА
Київський національний університет будівництва і архітектури

ЗАСТОСУВАННЯ ВИРАЗУ ПРИНЦИПУ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ У КВАНТОВО-МЕХАНІЧНІЙ ФОРМІ ҐЕЙЗЕНБЕРГА ДЛЯ АНАЛІЗУ СТІЙКОСТІ МЕХАТРОННИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ РОБОТОТЕХНІЧНИХ КОМПЛЕКСІВ

Проведено аналіз стійкості мехатронних систем автоматичного управління робототехнічними комплексами на основі квантово-механічної форми Ґейзенберга, у якій сформульований принцип невизначеності. Отримані кількісні оцінки тривалості перехідного процесу та смуги частот для послідовного з'єднання будь-якого числа (n ***) однакових інерційних ланцюгів робота й для коливного ланцюга 2-го порядку комплексів (роботів/маніпуляторів).***

The mechatronic systems' stability analysis on automatic control of robotic systems based on the Heisenberg quantum mechanical form has been performed, within the scope of which the principle of uncertainty has been formulated. Quantitative estimations of the transient process's duration and of the band of frequencies for the series connection of (n ***) random number of the robot's identical relaxation circuits and for the oscillation circuit of the second order's systems (robots/manipulators) have been obtained.***

Постановка проблеми. Для аналізу стійкості мехатронних систем автоматичного управління (САУ) робототехнічних комплексів важливо знати основні характеристики перехідного процесу, а саме: 1) його тривалість; 2) смугу частот. Крім того, необхідно дослідити стійкість подібних САУ до статистичних впливів (шумів), бо саме вона у кінцевому рахунку визначає тривалість обробки процесу й знижує/підвищує швидкодію вказаних мехатронних систем (МС). Подібні міркування справедливі й для співвідношення "шум-маневр" робототехнічних комплексів у задачах відслідковування. Існуюча форма представлення принципу невизначеності (наприклад, Вудворда [1, 2]) у теорії сигналів повинна бути в природний спосіб розповсюджена на задачі аналізу стійкості МС САУ нестаціонарних механічних систем та систем з кінцевою пам'яттю.

На думку авторів цієї роботи, таким підходом до вирішення окресленої проблеми є квантово-механічна форма Ґейзенберга для представлення принципу невизначеності, наведена, зокрема, у [3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У [1] сформульований принцип невизначеності для лінійних систем автоматичного управління (САУ), відповідно до якого для класу стаціонарних фізично здійсненних асимптотично стійких САУ з кінцевою смугою пропускання визначена функція невизначеності $\Phi(t,\omega)$ (де t – поточний час, ω – частота), об'єми тіла, невизначеності якої розмірності 1 та 2 сталі й дорівнюють 1 для довільної імпульсної перехідної функції $k(\tau)$ вказаного класу. Така форма представлення принципу невизначеності запропонована Вудвордом для теорії сигналів [4] й розвинена у [2].

У [5] сформульований принцип невизначеності для САУ в істотно іншій формі, аналогічній до тієї, яка була запропонована Ґейзенбергом для квантової механіки [3], а також встановлена еквівалентність обох вказаних форм для САУ.

Мета роботи – встановити основні кількісні оцінки (тривалості та смуги частот) перехідного процесу для послідовного з’єднання будь-якого числа n однакових інерційних ланцюгів робототехнічних комплексів (РК) й для коливного ланцюга 2-го порядку вказаних РК (або маніпуляторів) за допомогою принципу невизначеності у квантово-механічній формі Ґейзенберга. Подібний підхід дає змогу провести аналіз стійкості МС САУ РК.

Виклад основного матеріалу дослідження. Використовуючи результати [5], можна встановити, що для $L = L(t)$ – лінійного самоспряженого додатно-визначеного оператора (L^{-1} – його обернений оператор) справедливими є такі співвідношення:

$$\begin{cases} \int\limits_0^{\infty} dt \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[L\Phi(t,\omega)\right]^2 d\omega = \Delta p \ ; \qquad \int\limits_0^{\infty} dt \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[L^{-1}\Phi(t,\omega)\right]^2 d\omega = \Delta q \ ; \\ \Delta p \cdot \Delta q \ge 1 \ , \end{cases} \tag{1}$$

де Δp та Δq мають відповідно розмірність c та c^{-1}.

Якщо $[\Delta q] = Гц$, тоді

$$\Delta p \cdot \Delta q \ge \frac{1}{2\pi}, \tag{2}$$

тобто остання нерівність у (1) набуває стандартної форми принципу Ґейзенберга.

Згідно з властивістю функції невизначеності Вудворда для МС САУ РК [1], можна отримати:

$$4\pi^2 = \left[\int\limits_0^{\infty} dt \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(t,\omega) d\omega\right]^2 = \left[\int\limits_0^{\infty} a(t,\omega) \cdot b(t,\omega) d\omega\right]^2, \tag{3}$$

де $a(t,\omega) = L\Phi(t,\omega)$, $b(t,\omega) = L^{-1}\Phi(t,\omega)$.

Послідовно застосовуючи два рази до останнього співвідношення (3) нерівність Буняковського–Шварца, отримаємо нерівності, зазначені у (1) та (2).

Якщо L – оператор множення на інтегровану з квадратом на (0, ∞) функцію часу $f(t) > 0$, тоді нерівності (1) та (2) набудуть вигляду

$$\Delta T \cdot \Delta\Omega \ge 1; \qquad \Delta T \cdot \Delta F \ge \frac{1}{2\pi}, \tag{4}$$

де

$$\begin{cases} \Delta T = \Delta p = \int\limits_0^{\infty} f^2(t) dt \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(t,\omega) d\omega \ ; \\ \Delta\Omega = \Delta q = \int\limits_0^{\infty} f^{-2}(t) dt \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(t,\omega) d\omega \ . \end{cases} \tag{5}$$

Зазначимо, що

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(t,\omega) d\omega = \frac{1}{\Omega^2} \cdot \int\limits_0^{t} k^2(\tau) \cdot k^2(t-\tau) dt \tag{6}$$

є оцінкою відношення сигнал/шум.

Величина

$$\Omega = \int\limits_0^{\infty} k^2(\tau) d\tau \tag{7}$$

є ефективною смугою пропускання.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Якщо $f(t)=2\sqrt{t}$, тоді співвідношення (4) являє собою нерівність для оцінки тривалості перехідного процесу $\Delta T, c$ й смуги частот $\Delta\Omega, c^{-1}$ або $\Delta F, Гц$, яких можна досягти:

$$\begin{cases} \Delta T = \dfrac{4}{\Omega^2}\cdot\int\limits_0^\infty t\cdot dt\cdot\int\limits_0^t k^2(\tau)\cdot k^2(t-\tau)d\tau \;; \\ \Delta\Omega = \dfrac{1}{4\Omega^2}\cdot\int\limits_0^\infty t^{-1}\cdot dt\cdot\int\limits_0^t k^2(\tau)\cdot k^2(t-\tau)d\tau \;. \end{cases} \tag{8}$$

Приклад 2. Якщо $f(t)=\tilde{a}\cdot t^m$, $m\neq 0$ (може бути $m>0$ або $m<0$), тоді співвідношення (4) дає такі оцінки параметрів перехідного процесу у МС САУ РК:

$$\begin{cases} \Delta T = \dfrac{\tilde{a}^2}{\Omega^2}\cdot\int\limits_0^\infty t^{2m}\cdot dt\cdot\int\limits_0^\infty k^2(\tau)\cdot k^2(t-\tau)d\tau \;; \\ \Delta\Omega = \dfrac{1}{\tilde{a}^2\cdot\Omega^2}\cdot\int\limits_0^\infty t^{-2m}\cdot dt\cdot\int\limits_0^\infty k^2(\tau)\cdot k^2(t-\tau)d\tau \;. \end{cases} \tag{9}$$

Зазначимо, що у [4] для співвідношення тривалості ΔT та смуги ΔF наведене співвідношення, яке схоже на (4), проте ΔT і $\Delta\Omega$ задані іншим способом, який вимагає, щоб різниця порядків чисельника і знаменника передавальної функції, що відповідає $k(\tau)$, була не менша за 2, що виключає, наприклад, інерційні ланцюги, астатичні коливні ланки з астатизмом 2-го порядку тощо. У [5] також наведені результати розрахунку ΔT та $\Delta\Omega$ для прикладу 1, проте допущені помилки під час інтегрування (у цій роботі вказані помилки виправлені).

Формули (4), (8) та (9) цього обмеження не мають і безпосередньо випливають з (1) та принципу невизначеності, який виражений у сигнальній формі Вудворда відповідно до (8) та (9).

Формули (4), (8) та (9) залишаються у силі й для нестаціонарної $k(t,\tau)$ вказаного класу, але параметр Ω^2 потрібно замінити на такий:

$$\Omega_2^2=\int\limits_0^\infty dt\cdot\int\limits_0^t k(t,\tau)\cdot k(t,t-\tau)d\tau\,. \tag{10}$$

До речі, зі співвідношення $\Delta p\cdot\Delta q\geq 1$ випливає постійність об’єму тіла невизначеності $\Phi(t,\omega)$, тобто принцип невизначеності у формі Вудворда.

Звідси випливає, що вираження принципу невизначеності для МС САУ РК у “сигнальній” формі Вудворда й “квантово-механічній” формі Ґейзенберга еквівалентні.

Зазначимо, що у випадку $L=L(\omega)$ й дія оператора L зводиться до множення на інтегровану з квадратом на (-∞, ∞) функцію частоти $\varphi(\omega)$, вирази Δp та Δq будуть аналогічними (4), проте $f^2(t)$ замінюється на $\varphi^2(\omega)$, $f^{-2}(t)$ на $\varphi^{-2}(\omega)$ й інтеграли по t та ω міняються місцями.

Вирази ΔT та $\Delta\Omega$ можна узагальнити, якщо застосувати нерівність Ґельдера:

$$\Delta\tilde{T}\cdot\Delta\tilde{\Omega}\geq 1;\qquad \Delta\tilde{T}\cdot\Delta\tilde{F}\geq\frac{1}{2\pi};\qquad \Delta\tilde{T}=\left[\int\limits_0^\infty t^r dt\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \Phi^r(t,\omega)d\omega\right]^{1/r};$$
$$\Delta\tilde{\Omega}=\left[\int\limits_0^\infty t^{-s} dt\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \Phi^s(t,\omega)d\omega\right]^{1/s};\qquad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1. \tag{11}$$

Застосуємо отримані результати до класу дискретних МС САУ РК. Для вказаного класу вираз функції невизначеності набуде такого вигляду:

$$\Phi(n,m) = \frac{1}{\Omega} \cdot \sum_{j=0}^{n} k_j \cdot k_{n-j} \cdot \exp\left[im \cdot \left(\frac{n}{2} - j \right) \cdot h \right], \tag{12}$$

де

$$\Omega = \sum_{j=0}^{\infty} k_j^2 ; \quad h = \Delta\omega \cdot \Delta t ; \quad k_j = k(j\Delta t), \tag{13}$$

Δt, $\Delta\omega$ – дискрети часу й частоти відповідно, причому ряд Ω – збіжний.

Враховуючи постійне значення об'єму тіла невизначеності

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi^2(n,m) = 1, \tag{14}$$

матимемо

$$4\pi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi(n,m) \cdot f(n) \cdot \Phi(n,m) \cdot f^{-1}(n), \tag{15}$$

де $f(n)$ – довільна цілочисельна функція. Застосовуючи двічі до останньої рівності дискретну нерівність Буняківського–Шварца, отримаємо

$$\begin{cases} \Delta T_g \cdot \Delta\Omega_g \geq \Delta t \cdot \Delta\omega = h \ ; \\ \Delta T_g \cdot \Delta\Omega_g \geq \Delta t \cdot \dfrac{\Delta\omega}{2\pi} = \dfrac{h}{2\pi} = \bar{h} \ , \end{cases} \tag{16}$$

де

$$\Delta T_g = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi^2(n,m); \quad \Delta\Omega_g = \Delta\omega \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f^{-1}(n) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi^2(n,m). \tag{17}$$

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi^2(n,m) = \frac{1}{\Omega^2} \cdot \sum_{j=0}^{n} k_j^2 \cdot k_{n-j}^2 , \tag{18}$$

тоді формули (16) можна подати також у вигляді

$$\begin{cases} \Delta T_g = \dfrac{\Delta t}{\Omega^2} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n) \sum\limits_{j=0}^{n} k_j^2 \cdot k_{n-j}^2 \ ; \\ \Delta\Omega_g = \dfrac{\Delta\omega}{\Omega^2} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{-1}(n) \sum\limits_{j=0}^{n} k_j^2 \cdot k_{n-j}^2 \ . \end{cases} \tag{19}$$

Зокрема, якщо у (16) та (17) покласти $f(n) = n$, тоді (14) визначить нерівність для тривалості перехідного процесу й смуги частот дискретної МС САУ РК.

Варто зазначити, що в аналогічний спосіб можна показати еквівалентність (14) та (16) у сигнальній та квантово-механічній формах, а також розповсюдити цей результат на нестаціонарні системи й системи зі скінченною пам'яттю.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад А. послідовне з'єднання будь-якого числа n однакових інерційних ланок РК:

$$Y(p) = \prod_{k=1}^{n} (1 + pT)^{-1} , \qquad n = 1,2,.... . \tag{20}$$

Тут

$$k(\tau)=\frac{\tau^{n-1}\cdot e^{-\tau/T}}{(n-1)!\cdot T^n}, \qquad \Omega=\frac{(2n-2)!\cdot\frac{1}{T}}{2^{2n-1}\cdot[(n-1)!]^2}. \tag{21}$$

Згідно з (8)

$$\begin{cases}\Delta T=(4n-2)\cdot T\ ; \quad \Delta\Omega=\frac{1}{(4n-3)}\cdot\frac{1}{T}\ ; \\ \Delta T\cdot\Delta\Omega=\frac{4n-2}{4n-3}=1+\frac{1}{4n-3}>1\ .\end{cases} \tag{22}$$

За $n\to\infty$ $\Delta T\cdot\Delta\Omega\to 1$, тобто оцінку неможливо покращити (змінити на величину, яка не є нескінченно малою).

У табл. 1 наведено розрахунки ΔT, $\Delta\Omega$ та $\Delta T\cdot\Delta\Omega$ для послідовного з'єднання n однакових інерційних ланок РК.

Таблиця 1

Характеристики перехідного процесу для послідовного з'єднання n однакових інерційних ланок РК

n	2	5	7	10	20	30	50	70	90	100
$\Delta T/T$	6	18	26	38	78	128	198	278	358	398
$\Delta\Omega/(1/T)$	0,2000	0,0590	0,0400	0,0270	0,0130	0,0090	0,0050	0,0040	0,0030	0,0025
$\Delta T\cdot\Delta\Omega$	1,2000	1,0590	1,0400	1,0270	1,0130	1,0090	1,0050	1,0040	1,0030	1,0025

Приклад Б. коливна ланка 2-го порядку $\left(1+2\xi\cdot T\cdot p+T^2\cdot p^2\right)^{-1}$, $0<\xi<1$. Тут: $k(\tau)=\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{\beta}\cdot e^{-\alpha\cdot\tau}\cdot\sin(\beta\cdot\tau)$; $\Omega=\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{4\alpha}$; $\alpha=\xi\cdot T^{-1}$; $\beta=\sqrt{1-\xi^2}\cdot T^{-1}$. Позначимо $\alpha/\beta=\lambda$, відповідно до (8), знаходимо:

$$\begin{cases}\Delta T=\frac{(3\lambda^2+1)}{(\lambda^2+1)}\cdot\alpha^{-1}\ ; \quad \Delta\Omega=(\lambda^2+1)\cdot\left[(3\lambda^2+2)-3\cdot\lambda\cdot(\lambda^2+1)\cdot\mathrm{arcctg}\lambda\right]\cdot\alpha\ ; \\ \Delta T\cdot\Delta\Omega=(3\lambda^2+1)\cdot\left[(3\lambda^2+2)-3\cdot\lambda\cdot(\lambda^2+1)\cdot\mathrm{arcctg}\lambda\right].\end{cases} \tag{23}$$

За $\lambda=1$ $\Delta T\cdot\Delta\Omega\approx 1{,}15$; за $\lambda\to 0$ $\Delta T\cdot\Delta\Omega\to 1$, тобто оцінку неможливо покращити.

У табл. 2 наведено розрахунки ΔT, $\Delta\Omega$ та $\Delta T\cdot\Delta\Omega$ для різних значень λ, що описують параметри перехідного процесу коливної ланки РК 2-го порядку.

Аналіз результатів розрахунків, наведених у табл. 2, показує, що за зростання ξ від *0* до *1* (або λ від 0 до ∞): $\left(\Delta T/\alpha^{-1}\right)$ зростає від *1* до *3*, а $\left(\Delta\Omega/\alpha\right)$, – навпаки, спадає від *1,6* до *0,4*. (При цьому величина $\Delta T\cdot\Delta\Omega$ змінюється у межах (*1,63…1,2*), а саме – зменшується).

Множина параметрів Δp та Δq, для яких справедливі співвідношення (1) та (2), може бути розширена, якщо виходити з існування взаємної функції невизначеності [2], яка для МС САУ РК має вигляд

$$\Phi_{12}(t,\omega)=\frac{1}{\sqrt{\Omega_1\cdot\Omega_2}}\cdot\int_0^t k_1(\tau)\cdot k_2(t-\tau)\cdot e^{i\omega\left(\frac{t}{2}-\tau\right)}d\tau\ , \tag{24}$$

де $k_1(\tau)$, $k_2(\tau)$ – імпульсні перехідні функції із вищевказаного класу; Ω_1, Ω_2 – відповідні ефективні смуги пропускання. При цьому в (1) достатньо замінити $\Phi(t,\omega)$ на $|\Phi_{12}(t,\omega)|$, у виразі для Δq $\Phi(t,\omega)$ на $|\Phi_{21}(t,\omega)|$ згідно з (24).

Таблиця 2

Характеристики перехідного процесу для коливної ланки 2-го порядку РК

ξ	0,89940	0,98060	0,99500	0,999950	0,999999	0,6247	0,5145	0,3714	0,1961	0,0995
λ	2	5	10	100	1000	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1
$\Delta T / (\alpha^{-1})$	2,600000	2,923000	2,980000	2,999800	2,999998	1,78049	1,52941	1,27586	1,07692	1,01980
$\Delta\Omega / \alpha$	0,45290	0,40900	0,40230	0,40004	0,4000004	0,64473	0,75839	0,95482	1,31352	1,60009
$\Delta T \cdot \Delta\Omega$	1,17754	1,195507	1,198854	1,200040	1,2000004	1,147935	1,159889	1,218217	1,414556	1,63177

Висновки: 1. Принцип невизначеності для МС САУ РК у формі Ґейзенберга ілюструє стійкість вказаних САУ до статистичних впливів (шумів): чим вища стійкість до шумів, тим вужчим повинен бути обраний частотний діапазон, але при цьому у межах (4)–(8) повинна зрости тривалість обробки процесу і відповідно знизитися швидкодія САУ. Аналогічна ситуація відбудеться й для співвідношення “шум-маневр” у задачах відслідковування.

2. За послідовного з’єднання довільного числа n однакових інерційних ланок РК параметри перехідного процесу ΔT, $\Delta\Omega$ та $\Delta T \cdot \Delta\Omega$ поводять себе так (залежно від n): $\Delta T / T = (4n-2)$; $\Delta\Omega / (1/T) = \dfrac{1}{(4n-3)}$; $\Delta T \cdot \Delta\Omega = \dfrac{4n-2}{4n-3}$. При $n \to \infty$ $\Delta T \cdot \Delta\Omega \to 1$, причому цю оцінку неможливо покращити (тобто змінити на величину, яка є нескінченно малою).

3. Для коливної ланки РК 2-го порядку залежно від коефіцієнта дисипації ξ, який змінюється у межах від *0* до *1*, параметри перехідного процесу ΔT, $\Delta\Omega$ та $\Delta T \cdot \Delta\Omega$ поводять себе так: а) $\dfrac{\Delta T}{T} \cdot \xi$ зростає від *1* до *3*; б) $\dfrac{\Delta\Omega}{\xi} \cdot T$ спадає від *1,6* до *0,4*; в) $\Delta T \cdot \Delta\Omega$ залежить від параметра $\lambda = \dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ (формула (23)); за $\lambda = 1$ $\Delta T \cdot \Delta\Omega \approx 1{,}15$; за $\lambda \to \infty$ $\Delta T \cdot \Delta\Omega \approx 1{,}2$; за $\lambda << 1$ $\Delta T \cdot \Delta\Omega \approx 1{,}6$. Варто зазначити, що за $\lambda \to 0$ $\Delta T \cdot \Delta\Omega \to 1$ (причому цю оцінку принципово неможливо покращити!).

4. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення та вдосконалення інженерних розрахунків мехатронних систем автоматичного управління робототехнічних комплексів, як на етапах їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

1. Климов С.А., Тумаркин В.И. // ДАН. – 2010. – Т. 364, № 1. – С. 35–46. 2. Sinsky A.I., Wang C.D. // JEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. – 1974. – V. 10, № 4. – P. 117–130. 3. Шредингер Э. Избранные труды по квантовой механике / Э. Шредингер. – М.: Наука, 1976. – 520 с. 4. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы / У.М. Сиберт. – М.: Мир, 1988. – Ч. 2. – 320 с. 5. Климов С.А. Выражение принципа неопределённости для систем автоматического управления в квантово-механической форме Гейзенберга / С.А. Климов, В.И. Тумаркин // Доклады Академии наук (Россия). – 2000. – Т. 374, № 6. – С. 768–770.