

Ю.В. ЧОВНЮК, М.Г. ДІКТЕРУК, К.І. ПОЧКА
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДІВ ПЛАНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗГЛАДЖЕНИХ ТРАЄКТОРІЙ РУХУ БУДІВЕЛЬНИХ/ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ (МАНІПУЛЯТОРІВ) У ПРОСТОРІ ПРИЄДНАНИХ ЗМІННИХ

© Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Почка К.І., 2012

Запропоновано і обґрунтовано спосіб (алгоритм) планування згладжених траєкторій руху будівельних/промислових роботів (маніпуляторів) у просторі приєднаних змінних, який ґрунтується на поліномах сьомого степеня за часовою координатою (t) й уможливорює уникати ефектів “биття” вказаних траєкторій (процесу руху).

The method (algorithm) of planning of the smoothed motion paths as for construction/industrial robots (manipulators) in the space of rims variable has been proposed and substantiated which is based on the polynoms of the seventh degree in the (t) temporal coordinate and allows to evade “beating” effects of the indicated trajectories (of the course of movement).

Постановка проблеми. Відомо [1–10], що у задачі вибору закону управління, який забезпечує рух будівельних/промислових роботів (маніпуляторів) впродовж деякої заданої траєкторії, перед початком руху вказаного маніпулятора важливо знати: 1) чи існують на його шляху будь-які перешкоди? 2) чи накладаються будь-які обмеження на траєкторію захоплення. Залежно від відповідей на ці два запитання закон управління роботом/маніпулятором належить до одного з чотирьох типів, вказаних у табл. 1.

Таблиця 1

Типи управління будівельним/промисловим роботом (маніпулятором)

Наявність/відсутність обмежень на траєкторію маніпулятора	Перепони на шляху руху маніпулятора	
	присутні	відсутні
Наявні обмеження	Автономне планування траєкторії, що забезпечує обхід перепон, плюс регулювання руху впродовж обраної траєкторії у процесі роботи маніпулятора	Автономне планування траєкторії плюс регулювання руху впродовж обраної траєкторії у процесі роботи маніпулятора
Відсутність обмежень	Позиційне управління плюс виявлення та обхід перепон (перешкод) у процесі руху	Позиційне управління

З табл. 1 бачимо, що задача управління маніпулятором розпадається на дві взаємно пов’язані підзадачі: вибір (планування) траєкторії та реалізація руху маніпулятора впродовж обраної траєкторії. Спочатку переважно розглядають різні способи планування траєкторій маніпулятора за відсутності перешкод на шляху руху. Вводять формалізм описання заданої траєкторії маніпулятора у вигляді послідовності точок простору, у яких задані положення й орієнтація маніпулятора й просторової кривої, яка з’єднує ці точки. Криву, впродовж якої захоплювач маніпулятора рухається

з початкового положення у кінцеве, називають траєкторією захоплювача. Проблема полягає у розробленні математичного апарата для вибору й описання бажаного руху маніпулятора між початковою та кінцевою точками траєкторії.

Сутність різних способів планування траєкторій маніпулятора зводиться до апроксимації чи інтерполяції обраної траєкторії поліномами деякого класу і до вибору деякої послідовності опорних точок, у яких здійснюють корегування параметрів руху маніпулятора на шляху від початкової до кінцевої точок траєкторії. Початкова і кінцева точки траєкторії можуть бути задані як у приєднаних, так і у декартових координатах [10]. Найчастіше, однак, використовують для цього декартові координати, оскільки у них зручніше задавати правильне положення захоплювача. Крім того, приєднані координати непридатні як робоча система координат ще й тому, що осі зчленувань більшості будівельних/промислових роботів (маніпуляторів) не ортогональні, внаслідок чого неможливий незалежний опис положення й орієнтації захоплювача. Якщо ж у початковій та кінцевій точках траєкторії необхідно знати приєднані координати, їх значення можна отримати за допомогою програми розв'язку зворотної (оберненої) задачі кінематики.

Як правило, траєкторія, яка з'єднує початкове й кінцеве положення захоплювача, не єдина. Можливе, наприклад, переміщення маніпулятора як вздовж прямої, що з'єднує початкову й кінцеву точки (прямолінійна траєкторія), так і впродовж деякої гладкої кривої, яка задовольняє багато обмежень на положення й орієнтацію захоплювача на початковій та кінцевій ділянках траєкторії (згладжена траєкторія). Щоб врахувати обмеження динаміки руху маніпулятора, слід спочатку розглянути найпростіший випадок планування траєкторій, які задовольняють деяким обмеженням на характер руху захоплювача.

За своїм змістом (сутністю) планувальник траєкторій можна розглядати як "чорний ящик" (рис. 1). На вхід планувальника траєкторій подають деякі змінні, що характеризують накладені на траєкторію руху обмеження. Вихід – це задана у часі послідовність проміжних точок, у яких визначені у декартових чи приєднаних координатах положення, орієнтація, швидкість і прискорення захоплювача, і через які маніпулятор повинен пройти на шляху з початкової до кінцевої точок траєкторії. Під час планування траєкторій переважно застосовується один з двох таких підходів.

Перший полягає у тому, що дослідник задає точний набір обмежень (наприклад, неперервність та гладкість) на положення, швидкість та прискорення узагальнених координат маніпулятора у деяких точках траєкторії (вказані точки переважно називають вузловими). Планувальник траєкторій після цього обирає з деякого класу функцій (як правило, серед багаточленів, ступінь яких не перевищує деяке задане число n) функцію, що проходить через вузлові точки й задовольняє у них заданим обмеженням. Другий підхід полягає у тому, що дослідник задає бажану траєкторію маніпулятора у вигляді аналітично описуваної функції, як, наприклад, прямолінійну траєкторію у декартових координатах. Планувальник потім здійснює апроксимацію заданої траєкторії у приєднаних чи декартових координатах. У першому підході визначення обмежень і планування траєкторій здійснюють у приєднаних координатах. Оскільки на рух захоплювача жодних обмежень не накладають, досліднику важко увияти траєкторію захоплювача, яка реалізується, і тому виникає можливість зіткнення з перешкодами, інформація про наявність яких на шляху захоплювача відсутня. За другого підходу обмеження задаються у декартових координатах, у той час, як силові приводи реалізують зміну приєднаних координат. Тому для знаходження траєкторії, що доволі точно апроксимує задану, за допомогою наближених функціональних перетворень переходять від обмежень, заданих у декартових координатах, до обмежень, заданих у



Рис. 1. Блок-схема планувальника траєкторій маніпулятора

приєднаних координатах, і тільки після цього відшуковують серед функцій заданого класу траєкторію, яка задовольняє обмеженням, що виражаються у приєднаних координатах.

Вищевказані два підходи до планування траєкторій маніпулятора можна було б використати для ефективного (фактично у реальному часі) конструювання (побудови) послідовностей вузлових точок траєкторій маніпулятора. Однак задана у часі послідовність векторів $\{ \vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), \ddot{\vec{q}}(t) \}$ у просторі приєднаних змінних формується без врахування обмежень динаміки маніпулятора, що може призводити до виникнення значних помилок відслідковування під час управління маніпулятором. (Тут $\vec{q}(t)$ – вектор узагальнених координат, що залежить від часу t ; $\dot{\vec{q}}(t)$ – вектор швидкостей узагальнених координат; $\ddot{\vec{q}}(t)$ – вектор прискорень узагальнених координат).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Планування траєкторій маніпуляторів (промислових, будівельних роботів) розглянуто у [1–10]. Методи описання прямолінійного руху між послідовними вузловими точками викладені у [11–13].

У загальному випадку планування траєкторій у декартових координатах полягає у реалізації двох послідовних кроків: 1) формування послідовності вузлових точок у декартовому просторі, розміщених впродовж запланованої траєкторії захоплювача; 2) вибір деякого класу функцій, що описують (апроксимують) ділянки траєкторії між вузловими точками відповідно до деякого критерію. Критерій, що використовується на другому кроці, обирається, як правило, із врахуванням алгоритмів, які застосовуються потім для управління задля того, щоб гарантувати можливість руху впродовж обраної траєкторії. Існують два основні підходи до планування траєкторій у декартовому просторі. У першому з них більшість обчислень, оптимізація траєкторій і подальше регулювання руху здійснюються у декартових координатах. (Зокрема, керуючий сигнал, що подається на привід, обчислюється за розбіжністю між поточним та заданим положеннями захоплювача у декартовому просторі). Вузлові точки на заданій прямолінійній траєкторії у декартовому просторі обираються через фіксовані інтервали часу. Обчислення значень приєднаних координат у цих точках здійснюються у процесі управління рухом маніпулятора. Другий підхід полягає в апроксимації прямолінійних ділянок траєкторії у декартовому просторі траєкторіями у просторі приєднаних змінних, отриманими у результаті інтерполяції траєкторії між сусідніми вузловими точками поліномами низького степеня. Регулювання руху у цьому підході здійснюється на рівні приєднаних змінних. (Керуючий сигнал, який подається на привід, обчислюється за розбіжністю між поточним та заданим положеннями маніпулятора у просторі приєднаних координат). Запропонований Тейлором [13] метод побудови траєкторій з обмеженими відхиленнями та розроблений Ліном метод описання траєкторій кубічними сплайнами [14] використовують апроксимацію прямолінійної траєкторії поліномами низького степеня у просторі приєднаних змінних.

Перший з вищенаведених підходів до планування траєкторій у декартовому просторі дає змогу забезпечити високу точність руху впродовж заданої траєкторії. Однак усі відомі алгоритми управління рухом будуються із врахуванням відсутності датчиків, що вимірюють положення захоплювача у декартовому просторі, у просторі приєднаних змінних. Це приводить до необхідності здійснювати перетворення декартових координат захоплювача у вектор приєднаних координат маніпулятора у процесі руху – задача, яка вимагає великої кількості обчислень й до того ж нерідко така, що збільшує термін управління маніпулятором. Крім того, перехід від декартових до приєднаних координат погано зумовлений через відсутність взаємно-однозначної відповідності між цими координатами. У подальшому вимоги щодо траєкторії (неперервність, гладкість, граничні умови) формулюються у декартових координатах, у той час, як обмеження динаміки, які необхідно враховувати на етапі планування траєкторії, задаються у просторі приєднаних змінних. У результаті необхідно розв'язувати задачу оптимізації з обмеженнями, заданими у різних системах координат.

Вищеперераховані недоліки першого підходу призводять до того, що ширше використовується другий підхід, який ґрунтується на перетворенні декартових координат вузлових точок у відповідні приєднані координати з подальшим проведенням інтерполяції у просторі приєднаних змінних поліномами низького степеня. Цей підхід забезпечує менші (порівняно з першим) обчислювальні витрати часу й полегшує врахування обмежень динаміки маніпулятора. Однак точність руху вздовж заданої у декартовому просторі траєкторії при цьому знижується.

Мета роботи – обґрунтувати алгоритм планування згладжених траєкторій маніпулятора у просторі приєднаних змінних, який для описання руху його i -го зчленування використовує поліном високого степеня (сьомого). Для оптимізації кінематичних параметрів руху застосовується певний критерій якості, необхідною умовою реалізації якого є рівняння Ейлера–Пуассона.

Виклад основного матеріалу дослідження

1. Планування згладжених траєкторій руху будівельного/промислового робота (маніпулятора) у просторі приєднаних змінних

Під час управління маніпулятором (цей термін буде у подальшому вживатися у тексті роботи як узагальнювальний), перш ніж розпочати планувати траєкторії руху, необхідно визначити конфігурації маніпулятора у початковій та кінцевій точках траєкторії. Планування згладжених траєкторій у просторі приєднаних змінних слід здійснювати із врахуванням таких міркувань [15]:

1. У момент підйому об'єкта маніпулювання рух захоплювача повинен бути спрямований від об'єкта; у протилежному випадку може відбутись зіткнення захоплювача з поверхнею, на якій розміщений об'єкт.

2. Якщо задати точку відходу на нормалі до поверхні, яка проходить через початкове положення захвата, на якій розміщений об'єкт, й вимагати, щоб траєкторія захоплювача проходила через цю точку, тоді буде заданий простий рух відходу. Задаючи час, за який захоплювач потрапить у цю точку, можна коригувати швидкість руху захоплювача на початковій ділянці (ділянці відходу).

3. Аналогічні умови можна сформулювати для ділянки підходу до заданого кінцевого положення: захоплювач повинен пройти через точку підходу, яка розміщена на нормалі до поверхні, що проходить через кінцеве положення захоплювача, й на яку повинен бути розміщений об'єкт маніпулювання. Це забезпечить правильний напрям руху на кінцевій ділянці траєкторії (ділянці підходу).

4. З вищенаведеного випливає, що будь-яка траєкторія руху маніпулятора повинна проходити через чотири задані точки: початкову точку, точку відходу, точку підходу й кінцеву точку (рис. 2).

5. На траєкторію руху накладаються умови:

а) початкова точка: задані швидкість і прискорення (зазвичай, нульові);

б) точка відходу: неперервність положення швидкості і прискорення;

в) точка підходу: те саме, що й для точки відходу;

г) кінцева точка: задані швидкість і прискорення (зазвичай, нульові).

6. Значення приєднаних координат повинні лежати у межах фізичних та геометричних обмежень кожного із зчленувань маніпулятора.

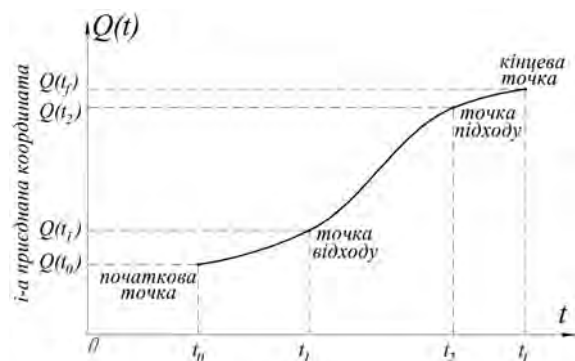


Рис. 2. Обмеження щодо положення для траєкторії у просторі приєднаних змінних

7. Під час визначення часу руху необхідно врахувати таке:

а) термін проходження початкового й кінцевого елементів (ділянок) шляху/траєкторії обирається із врахуванням необхідної швидкості підходу й відходу захоплювача й являє собою деяку константу, яка залежить від характеристик силових приводів зчленувань;

б) час руху впродовж середньої ділянки траєкторії визначається максимальними значеннями приєднаних швидкостей і прискорень кожного із зчленувань. Для нормування використовується максимальний час, необхідний для проходження цієї ділянки траєкторії найповільнішим зчленуванням.

Умови, яким повинна задовольняти типова згладжена траєкторія у просторі приєднаних змінних, перераховані у табл. 2. Слід обрати деякий клас поліноміальних функцій степеня не вище n , які дають змогу здійснювати інтерполяцію траєкторії за заданими вузловими точками (початкова точка, точка відходу, точка підходу, кінцева точка), що забезпечує виконання умови неперервності положення, швидкості й прискорення на усьому інтервалі часу $[t_0, t_f]$. Один із способів полягає у тому, щоб описати рух i -го зчленування поліномом сьомого степеня:

$$q_i(t) = a_7 \cdot t^7 + a_6 \cdot t^6 + a_5 \cdot t^5 + a_4 \cdot t^4 + a_3 \cdot t^3 + a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0, \quad (1)$$

у якому невідомі коефіцієнти a_j , $j = (0, 1, \dots, 7)$ визначаються із заданих граничних умов та умов неперервності.

Таблиця 2

Обмеження на траєкторію у просторі приєднаних змінних

Точка траєкторії руху маніпулятора	Задані граничні умови у точці
Початкова точка	1. Положення (задане). 2. Швидкість (задана, зазвичай, нульова). 3. Прискорення (задане, зазвичай нульове)
Проміжні точки	4. Положення у точці відходу (задане). 5. Положення у точці відходу (змінюється безперервно за переходу між послідовними ділянками траєкторії). 6. Швидкість (змінюється безперервно за переходу між послідовними ділянками траєкторії). 7. Прискорення (змінюється безперервно за переходу між послідовними ділянками траєкторії). 8. Положення у точці підходу (задане). 9. Положення у точці підходу (змінюється безперервно за переходу між послідовними ділянками траєкторії). 10. Швидкість (змінюється безперервно за переходу між послідовними ділянками траєкторії). 11. Прискорення (змінюється безперервно за переходу між послідовними ділянками траєкторії)
Кінцева точка	12. Положення (задане). 13. Швидкість (задана, зазвичай, нульова). 14. Прискорення (задане, зазвичай, нульове)

Слід зазначити, що на думку авторів [10], використання полінома такого високого степеня (сьомого) (1) призводить до цілої низки недоліків. Зокрема, важко визначити його екстремальні значення. Крім того, інтерполяція поліномами високого степеня призводить до появи “биття” інтерполюючої функції, яке зумовлює непотрібні (і навіть шкідливі) рухи маніпулятора. Тому автори [10] пропонують альтернативний підхід, який полягає у тому, щоб розбити траєкторію руху на кілька ділянок й кожну з цих ділянок інтерполювати поліномом низького степеня. (Існує, до речі, багато різноманітних способів розбиття траєкторії на ділянки, кожний з яких має переваги й недоліки. Найрозповсюдженіші такі способи [10]: 4-3-4-траєкторії; 3-5-3-траєкторії; кубічні сплайни, які використовуються за розбиття траєкторії на п’ять ділянок).

Автори цієї роботи обґрунтовують використання саме поліномів (1), які логічно впливають з необхідних умов (рівняння Ейлера–Пуассона) існування критерію мінімуму квадрата четвертої похідної від узагальненої q_j -ї координати по часу t :

$$J = \int_0^{t_f} \left\{ \dot{q}_j^{(IV)} \right\}^2 dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

Саме такий критерій руху маніпулятора забезпечує необхідну гладкість руху (траєкторії) в усіх точках (початковій, кінцевій, проміжних).

Константи $a_i, i = (0,1,\dots,7)$ у (1) визначаємо з таких граничних умов:

$$q_j|_{t=0} = \dot{q}_j|_{t=0} = \ddot{q}_j|_{t=0} = \ddot{\ddot{q}}_j|_{t=0} = 0; \quad q_j|_{t=t_f} = q_{jf}; \quad \dot{q}_j|_{t=t_f} = \dot{q}_j|_{t=t_f} = \ddot{q}_j|_{t=t_f} = 0. \quad (3)$$

Рівняння Ейлера–Пуассона для умови (2) має такий вигляд:

$$q_j^{(VIII)} = 0. \quad (4)$$

Розв’язок (4) відшукуємо у вигляді полінома (1) по t .

З початкових/граничних (крайових) умов (3) легко знаходимо

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0; & a_4 = \left(\frac{427}{953}\right) \cdot \frac{q_{jf}}{t_f^4}; & a_5 = \left(-\frac{84}{953}\right) \cdot \frac{q_{jf}}{t_f^5}; \\ a_6 = \left(\frac{854}{953}\right) \cdot \frac{q_{jf}}{t_f^6}; & a_7 = \left(-\frac{244}{953}\right) \cdot \frac{q_{jf}}{t_f^7}. \end{cases} \quad (5)$$

Отже, закон руху $q_j(t)$, що задовольняє критерій якості руху (2) за заданих граничних умов (3), набуває такого вигляду:

$$q_j(t) = \frac{q_{jf}}{953} \cdot \left\{ -244 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^7 + 854 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^6 - 84 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^5 + 427 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^4 \right\}. \quad (6)$$

Саме закон руху q_j -ї координати маніпулятора/робота (6) забезпечує необхідну гладкість траєкторії руху в усіх її точках (початковій, кінцевій, проміжних).

2. Планування оптимальних (за кінематичними параметрами) траєкторій, які задовольняють заданим критеріям якості руху

2.1. Оптимізація (мінімізація) кінематичних параметрів власних коливань дискретних підсистем роботів/маніпуляторів

Математична модель власних коливань дискретних підсистем (тобто підсистем із зосереджуваними параметрами) роботів/маніпуляторів зводиться до типового диференціального рівняння:

$$m \cdot \ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0; \quad \left(\dot{}\right) = \frac{d}{dt}(); \quad \left(\ddot{}\right) = \frac{d^2}{dt^2}(), \quad (7)$$

де m – маса підсистеми; c – жорсткість; α – коефіцієнт в’язкого опору рухові підсистеми; t – час; x – узагальнена координата. Введемо такі позначення та нові змінні:

$$\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \beta = \frac{\alpha}{m \cdot \Omega}; \quad \tau = \Omega \cdot t; \quad \tilde{x} = \frac{x}{x_{II}}, \quad (8)$$

де x_{II} – значення координати x у момент часу $t = t_{II}$ (закінчення періоду пуску підсистеми; по суті, t_{II} – це тривалість перехідного процесу (пуску) у цій підсистемі). Вважаємо, що у момент $t = t_{II}$: $\dot{x} = V_{II} = const$ (усталена швидкість руху підсистеми), а початкові умови ($t = 0$) нульові:

$$x|_{t=0} = \dot{x}|_{t=0} = 0, \quad (9)$$

тоді у змінних (\tilde{x}, τ) рівняння (7), з урахуванням позначень (8), набуває вигляду

$$\tilde{x}_{2\tau} + \beta \cdot \tilde{x}_\tau + \tilde{x} = 0, \quad (10)$$

а початкові (крайові) умови зводяться до таких:

$$\tilde{x}|_{\tau=0} = \dot{\tilde{x}}|_{\tau=0} = 0; \quad \tilde{x}|_{\tau=\tau_{II}} = 1; \quad \dot{\tilde{x}}|_{\tau=\tau_{II}} = \frac{V_{II}}{\Omega \cdot x_{II}}; \quad \tau_{II} = \Omega \cdot t_{II}. \quad (11)$$

А. Знайдемо закон руху підсистеми робота/маніпулятора дискретного типу, за якого реалізується такий критерій якості (цього руху):

$$\int_0^{\tau_{II}} \tilde{x}^2 d\tau \Rightarrow \min. \quad (12)$$

З рівняння (10) легко встановити, що

$$\tilde{x} = -\tilde{x}_{2\tau} - \beta \cdot \tilde{x}_{\tau}. \quad (13)$$

Тоді критерій (12) зведеться до

$$\int_0^{\tau_{II}} (\tilde{x}_{2\tau} + \beta \cdot \tilde{x}_{\tau})^2 d\tau \Rightarrow \min. \quad (14)$$

Необхідна умова реалізації критерію якості руху (14) полягає у встановленні рівняння Ейлера–Пуассона для нього:

$$\tilde{x}_{4\tau} - \beta^2 \cdot \tilde{x}_{2\tau} = 0. \quad (15)$$

Розв'язок (15) має такий вигляд:

$$\tilde{x}(\tau) = C_1 + C_2 \cdot \tau + C_3 \cdot e^{\beta \cdot \tau} + C_4 \cdot e^{-\beta \cdot \tau}, \quad (16)$$

де $C_i, i = \overline{1,4}$, знаходимо з умов (11):

$$\begin{cases} C_1 + C_3 + C_4 = 0 ; \\ C_2 + \beta \cdot C_3 - \beta \cdot C_4 = 0 ; \\ C_1 + C_2 \cdot \tau_{II} + C_3 \cdot e^{\beta \cdot \tau_{II}} + C_4 \cdot e^{-\beta \cdot \tau_{II}} = 1 ; \\ C_2 + \beta \cdot C_3 \cdot e^{\beta \cdot \tau_{II}} - \beta \cdot C_4 \cdot e^{-\beta \cdot \tau_{II}} = \frac{V_{II}}{x_{II} \cdot \Omega} . \end{cases} \quad (17)$$

Систему лінійних рівнянь (17) стосовно коефіцієнтів C_i легко розв'язати за правилом Крамера (у зв'язку з громіздкістю ці розв'язки тут не наведені).

Б. Знайдемо закон руху підсистеми робота/маніпулятора дискретного типу, за якого реалізується такий критерій якості (цього руху):

$$\int_0^{\tau_{II}} (\tilde{x}_{\tau})^2 d\tau \Rightarrow \min. \quad (18)$$

Виконуючи ті самі процедури, що й для критерію (12), можна отримати для (18) таке рівняння Ейлера–Пуассона (необхідна умова реалізації (18)):

$$\tilde{x}_{4\tau} + 2 \cdot \tilde{x}_{2\tau} + \tilde{x} = 0. \quad (19)$$

Розв'язок (19) має такий вигляд:

$$\tilde{x}(\tau) = (\overline{C}_1 + \overline{C}_2 \cdot \tau) \cdot \sin \tau + (\overline{C}_3 + \overline{C}_4 \cdot \tau) \cdot \cos \tau. \quad (20)$$

Константи $C_i, i = \overline{1,4}$ знаходимо з таких умов:

$$\begin{cases} \overline{C}_3 = 0 ; \quad \overline{C}_1 + \overline{C}_4 = 0 ; \quad (\overline{C}_1 + \overline{C}_2 \cdot \tau_{II}) \cdot \sin \tau_{II} + \overline{C}_4 \cdot \tau_{II} \cdot \cos \tau_{II} = 1 ; \\ \overline{C}_2 \cdot \sin \tau_{II} + (\overline{C}_1 + \overline{C}_2 \cdot \tau_{II}) \cdot \cos \tau_{II} + \overline{C}_4 \cdot \cos \tau_{II} - \overline{C}_4 \cdot \tau_{II} \cdot \sin \tau_{II} = \frac{V_{II}}{x_{II} \cdot \Omega} . \end{cases} \quad (21)$$

Розв'язки (21) стосовно $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \overline{C}_4$ легко знаходяться за правилом Крамера (у зв'язку з громіздкістю тут не наведені).

В. Знайдемо закон руху підсистеми робота/маніпулятора дискретного типу, за якого реалізується такий комплексний критерій якості (цього руху):

$$\int_0^{\tau_{II}} \left\{ (\tilde{x}_{2\tau})^2 + (\tilde{x}_{1\tau})^2 + (\tilde{x})^2 \right\} d\tau \Rightarrow \min . \quad (22)$$

Рівняння Ейлера–Пуассона для критерію (22) (необхідна умова реалізації останнього) має такий вигляд:

$$\tilde{x}_{4\tau} - \tilde{x}_{2\tau} + \tilde{x} = 0 . \quad (23)$$

Розв’язок (23) зводиться до

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\tau) = & C_1^* \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \tau\right) + C_2^* \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \tau\right) + \\ & + C_3^* \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \tau\right) + C_4^* \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \tau\right) . \end{aligned} \quad (24)$$

Константи C_i^* , $i = \overline{1,4}$ знаходимо з такої системи лінійних рівнянь (за правилом Крамера):

$$\left\{ \begin{aligned} & C_2^* + C_4^* = 0 ; \quad C_1^* \cdot \frac{1}{2} + C_2^* \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + C_3^* \cdot \frac{1}{2} - C_4^* \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 ; \\ & C_1^* \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) + C_2^* \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) + \\ & + C_3^* \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) + C_4^* \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) = 1 ; \\ & C_1^* \cdot \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) + \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) \right\} + \\ & + C_2^* \cdot \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) - \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) \right\} + \\ & + C_3^* \cdot \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) + \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) \right\} + \\ & + C_4^* \cdot \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) - \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tau_{II}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \tau_{II}\right) \right\} = \frac{V_{II}}{x_{II} \cdot \Omega} . \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Г. Знаходимо закон руху підсистеми робота/маніпулятора дискретного типу, за якого реалізується такий критерій якості (цього руху), що відповідає вимушеним коливанням вказаної підсистеми:

$$\int_0^{\tau_{II}} (\tilde{\tilde{x}}_\tau)^2 d\tau \Rightarrow \min , \quad (26)$$

де введена узагальнена координата переміщення (за вимушених коливань підсистеми) $\tilde{\tilde{x}}$ визначається з рівняння

$$\tilde{\tilde{x}}_{2\tau} + \beta \cdot \tilde{\tilde{x}}_\tau + \tilde{\tilde{x}} = f(\tau); \quad \tilde{\tilde{x}} = \frac{\tilde{x}}{\left(\frac{F_0}{m \cdot x_{II} \cdot \Omega^2} \right)}, \quad (27)$$

де F_0 – амплітуда, а $f(\tau)$ – закон зміни у часі τ вимушеної сили.

Враховуючи (27), необхідною умовою реалізації критерію (26) є таке рівняння Ейлера–Пуассона:

$$\tilde{x}_{4\tau} - \beta^2 \cdot \tilde{x}_{2\tau} = f_{2\tau} - \beta \cdot f_{\tau}, \quad (28)$$

однорідний розв'язок якого має вигляд

$$\tilde{x}_{одн}(\tau) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \cdot \tau + \tilde{C}_3 \cdot \exp(\beta \cdot \tau) + \tilde{C}_4 \cdot \exp(-\beta \cdot \tau). \quad (29)$$

Частинний розв'язок (28) зводиться до:

$$\tilde{x}_{част}(\tau) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{\beta \cdot \tau}. \quad (30)$$

Тоді загальний розв'язок (28) набуває вигляду

$$\tilde{x}(\tau) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \cdot \tau + \tilde{C}_3 \cdot \exp(\beta \cdot \tau) + \tilde{C}_4 \cdot \exp(-\beta \cdot \tau) + \frac{1}{\beta} \cdot \exp(\beta \cdot \tau). \quad (31)$$

Невизначені константи C_i , $i = \overline{1,4}$ знаходимо за правилом Крамера з системи рівнянь (лінійного типу):

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 + \tilde{C}_3 + \tilde{C}_4 + \frac{1}{\beta} = 0; & \tilde{C}_2 + \beta \cdot \tilde{C}_3 - \beta \cdot \tilde{C}_4 + 1 = 0; \\ \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \cdot \tau_{II} + \tilde{C}_3 \cdot \exp(\beta \cdot \tau_{II}) + \tilde{C}_4 \cdot \exp(-\beta \cdot \tau_{II}) + \frac{1}{\beta} \cdot \exp(\beta \cdot \tau_{II}) = \frac{m \cdot x_{II} \cdot \Omega^2}{F_0}; \\ \tilde{C}_2 + \beta \cdot \tilde{C}_3 \cdot \exp(\beta \cdot \tau_{II}) - \beta \cdot \tilde{C}_4 \cdot \exp(-\beta \cdot \tau_{II}) + \exp(\beta \cdot \tau_{II}) = \frac{m \cdot V_{II} \cdot \Omega}{F_0}. \end{cases} \quad (32)$$

Д. Під час дослідження нестационарних коливань (перехідних процесів) підсистем роботів/маніпуляторів як вібростем з розподіленими параметрами необхідно визначити закон руху $\xi_A(t)$ деякої точки A пружного тіла (чи пружної конструкції, яка входить до складу підсистеми) у напрямку одиничного вектора \vec{i}_A під дією зосередженої сили $P(t)$, прикладеної у цій чи іншій точці B тіла у напрямку одиничного вектора \vec{i}_B . Скористаємось поняттям динамічної піддатливості тіла, яка є однією з основних частотних характеристик (нестационарних) коливань розглядуваної підсистеми. Динамічна піддатливість – це функція частоти збудження ω й визначається виразом $R(\omega) = \frac{\xi_A(t)}{\tilde{P}(t)}$, де $\xi_A(t)$ – закон руху точки A за усталених вимушених коливань тіла під дією гармонічної вимушеної сили $P(t) = \tilde{P}(t) = P_0 \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t)$, $j^2 = -1$, $P_0 = const$. Враховуючи дію дисипативних сил (типу ньютонівського в'язкого тертя), динамічну піддатливість можна подати у вигляді ряду

$$R(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k \cdot \left\{ (\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \beta_k^2 \cdot \omega^2 \right\}^{1/2}}, \quad (33)$$

де ω_k – власні частоти коливань; β_k – питомі (на одиницю маси підсистеми) затування (коефіцієнти затування); $M_k = M_k(A, \vec{i}_A, B, \vec{i}_B)$ – еквівалентні маси тіла, які відповідають точці спостереження A , напрямку спостереження \vec{i}_A , точці збудження B та напрямку збудження \vec{i}_B , еквівалентні маси підсистеми у загальному випадку можна виразити через власні форми $\xi_k(x, y, z)$ коливань тіла (підсистема робота/маніпулятора з розподіленими параметрами) [15]:

$$M_k = \frac{\rho \cdot \int_V \xi_k^2 dV}{\left(\left\{ \xi_k(x_A, y_A, z_A) \cdot \vec{i}_A \right\} \cdot \left\{ \xi_k(x_B, y_B, z_B) \cdot \vec{i}_B \right\} \right)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (34)$$

де ρ – щільність; V – об’єм тіла; $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ – координати точок A та B ; круглі дужки у знаменнику формули (34) символізують скалярний добуток векторних величин.

За нульових початкових умов переміщення точки A у напрямку \vec{i}_A під дією сили $P(t)$ можна подати у вигляді

$$\xi_A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k \cdot \omega_k} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \sin[\omega_k \cdot (t - \tau)] d\tau. \quad (35)$$

Критерій якості руху для цього випадку подамо у вигляді

$$J = \int_0^{t\pi} (\xi_A)^2 dt \Rightarrow \min, \quad (36)$$

або, враховуючи (35):

$$J = \int_0^{t\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{P_k(t) \cdot P_{k'}(t)}{M_k \cdot \omega_k \cdot M_{k'} \cdot \omega_{k'}} \right\} dt \Rightarrow \min, \quad (37)$$

де

$$P_k(t) = \int_0^t P(\tau) \cdot \sin[\omega_k \cdot (t - \tau)] d\tau, \quad (38)$$

а формулу для $P_{k'}(t)$ можна отримати з (38), замінюючи $k \rightarrow k'$. Якщо позначити

$$P_k(t) \cdot P_{k'}(t) = \tilde{P}_{kk'}(t), \quad (39)$$

тоді (37) можна подати у такому вигляді:

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{P_{kk'}(t)}{M_k \cdot M_{k'} \cdot \omega_k \cdot \omega_{k'}} \Rightarrow \min. \quad (40)$$

Зрозуміло, що введення $R(\omega)$ (33) дає змогу за заданих значень $\tilde{P}_{kk'}(t)$ звести (40) до такого критерію:

$$R(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k \cdot \left\{ (\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \beta_k^2 \cdot \omega^2 \right\}^{1/2}} \Rightarrow \min. \quad (41)$$

Екстремальних значень вираз $R(\omega)$ досягає за двох значень ω :

а)
$$R(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k \cdot \omega_k^2} = R(\omega)|_{\omega=0} = R_{\min}; \quad (42)$$

б)
$$R(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k \cdot \beta_k \cdot \left(\omega_k^2 - \frac{\beta_k^2}{4} \right)^{1/2}} = R(\omega)|_{\omega = \left(\omega_k^2 - \frac{\beta_k^2}{4} \right)^{1/2}} = R_{\max}. \quad (43)$$

Тобто критерій (41), а, значить й (37), реалізуються за $\omega \rightarrow 0$ (статичний режим), а максимальні зміщення точки $A(\xi_A)$ відбуваються за умови

$$\omega = \left(\omega_k^2 - \frac{\beta_k^2}{4} \right)^{1/2}. \quad (44)$$

Отже, слід уникати резонансних ситуацій (збудження коливань вимушеної сили на частоті ω , яка відповідає резонансному на k -й формі коливань (44)).

За $\beta_k \rightarrow 0$ з (41) маємо

$$R(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k \cdot (\omega_k^2 - \omega^2)}. \quad (45)$$

Зрозуміло, що за $\beta_k \rightarrow 0$ R_{\max} (43) прямує до нескінченності, а вираз (45) зводить умову резонансу (44) до наступної: $\omega = \omega_k$, за якої $R(\omega) \rightarrow \infty$.

Висновки: 1. Наведений опис руху j -го зчленування маніпулятора (робота) промислового/будівельного типу, який дає змогу запланувати необхідну траєкторію вказаного руху з певним (достатнім) ступенем її гладкості, а саме – поліномом сьомого степеня.

2. Задача розв'язана для двох випадків: а) у межах моделі зчленування як системи із зосередженими параметрами; б) у межах моделі зчленування як системи із розподіленими параметрами. У другому випадку використаний підхід, пов'язаний із введенням динамічної піддатливості системи.

3. Екстремальні значення вищевказаного (у п. 1 висновків) полінома легко знаходити за правилами вищої математики, а інтерполяція траєкторії руху маніпулятора/робота в подібний спосіб дає змогу позбутися негативних ефектів “биття” інтерполюючої рух (траєкторію руху) функції (в усіх точках руху).

4. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для вдосконалення й уточнення існуючих алгоритмів розрахунку планувальника траєкторій руху роботів/маніпуляторів промислового (будівельного) типу як на стадіях їх конструювання або проектування, так і у режимах реальної експлуатації.

1. *Робототехника и гибкие производственные системы: Проблемы создания гибких автоматических производств / под ред. академиком И.М. Макарова, К.В. Фролова, чл.-корр. АН СССР П.Н. Белянина. – М.: Наука, 1987.*
2. *Научные основы робототехники / под ред. чл.-корр. АН СССР Д.Е. Охоцимского и чл.-корр. АН СССР Е.М. Попова. – М.: Наука, 1987.*
3. *Попов Е.П. Манипуляционные роботы: Динамика и алгоритмы / Е.П. Попов, В.Ф. Верещагин, С.Л. Зенкевич. – М.: Наука, 1978.*
4. *Медведев В.С. Системы управления манипуляционных роботов / В.С. Медведев, А.Г. Лесков, А.С. Юценко. – М.: Наука, 1978.*
5. *Кулешов В.С. Динамика систем управления манипуляторами / В.С. Кулешов, Н.А. Лакота. – М.: Энергия, 1971.*
6. *Промышленная робототехника / под ред. Я.А. Шифрина. – М.: Машиностроение, 1983.*
7. *Пашков Е.В. Робототехнические системы в сборочном производстве / Е.В. Пашков, Б.В. Погорелов, А.Г. Карлов и др. – К.: Вища шк., 1987.*
8. *Костюк В.И. Промышленные роботы: конструирование, управление, эксплуатация / В.И. Костюк, А.П. Гавриш, Л.С. Ямпольский, А.Г. Карпов. – К.: Вища шк., 1985.*
9. *Черноуцько Ф.Л. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация / Ф.Л. Черноуцько, Н.Н. Болотник, В.Г. Градецкий. – М.: Наука, 1989.*
10. *Фу К. Робототехника / К. Фу, Р. Гонсалес, К. Лу. – М.: Мир, 1989. – 624 с.*
11. *Luh J.Y.S. Optimum Path Planning for Mechanical Manipulators. / J.Y.S. Luh, C.S. Lin // Transactions of ASME. Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1981. – V. 102. – P. 142–151.*
12. *Paul R.P. Manipulator Cartesian Path Control. / R.P. Paul // JEEE Transaction. Systems, Manual Cybernetics. SMC-9. – 1979. – No 11. – P. 702–711.*
13. *Taylor R.H. Planning and Execution of Straight Line Manipulator Trajectories / R.H. Taylor // JBM J. Res. Dev. – 1973. – V. 23. – No. 4. – P. 424–436.*
14. *Lin C.S. Formulation and Optimization of Cubic Polynomial Joint Trajectories for Industrial Robots. / C.S. Lin, P.R. Chang, J.Y.S. Luh // JEEE Transactions on Automatic Control. – 1983. – Vol. AC-28. – No. 12. – P. 1066–1073.*
15. *Paul R.P. Modeling, Trajectory Calculation, and Servoing of a Computer Controlled arm. / R.P. Paul. – Memo AIM-177; Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Palo Alto, Calif., 1972.*
16. *Вернигор В.Н. Об исследовании колебаний упругих механических систем на основе их динамической податливости / В.Н. Вернигор // Вестник ЛГУ. – 1991. – Сер. 1. – Вып. 1. – С. 70–76.*