УДК 534.1+ 62-5

[1]О.І. ХИТРЯК, [2]М.Б. СОКІЛ
[1]Академія Сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного,
[2]Національний університет “Львівська політехніка”

ОБҐРУНТУВАННЯ НА ОСНОВІ ХВИЛЬОВОЇ ТЕОРІЇ РУХУ ДЕЯКИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ПОЗДОВЖНЬО-РУХОМИХ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТАХ

Досліджуються динамічні процеси у двовимірних поздовжньо-рухомих гнучких елементах. Описано фізичну модель. На її основі побудовано математичну. Вона складається із диференціального рівняння із частинними похідними, що містить мішану похідну по лінійній і часовій змінних, та однорідних крайових умов. Для вивчення лінійних аналогів систем використовується основна ідея хвильової теорії руху, яка дала можливість описати динамічний процес у вигляді накладання двох хвиль із однаковими частотами та різними довжинами. На основі отриманих аналітичних залежностей пояснено виникнення явища самозахоплення.

We study dynamic processes in two-dimensional longitudinal motion of flexible elements. For this purpose, it is described a physical model. On its basis the mathematical is constructed. It consists of a differential equation with partial derivatives containing mixed derivative by linear and temporal variables and homogeneous boundary conditions. To study the linear analogue systems it is used the basic idea of the wave theory of motion, which made it possible to describe the dynamic process as the superposition of two waves with identical frequencies and different lengths. Based on the analytical dependence it is explained the phenomena of squatters.

Актуальність та огляд основних результатів досліджень. Гнучкі поздовжньо-рухомі елементи систем приводу та транспортування широко використовуються у різних галузях. Враховуючи співвідношення між геометричними параметрами, їх умовно можна класифікувати як одно-, дво- та тривимірні. З іншого боку, залежно від здатності гнучкого елемента чинити опір згину, їх поділяють на елементи малої та значної згинної жорсткості. Належність досліджуваного об’єкта до того чи іншого класу визначає і відповідні математичні моделі. Сьогодні достатньою мірою для теоретичних та інженерних досліджень розроблено методику для одновимірних моделей [1–4]. Вона дає можливість пояснити, зокрема, залежність частоти коливань від поздовжньої швидкості та фізико-механічних параметрів, зрив коливань, існування порогової швидкості руху тощо. Проте пояснення такого цікавого явища, як самозахоплення [5], та багатьох інших виходить за межі її можливостей. З огляду на вказане дослідження динамічних процесів складнішого вигляду математичних моделей, а саме – двовимірних, є актуальним завданням.

Постановка завдання. Для описання процесів, які відбуваються у поздовжньо-рухомих гнучких елементах, спочатку зупинимось на фізичній моделі вказаних систем.

Фізична модель двовимірних гнучких елементів. Фізичною моделлю двовимірних гнучких елементів є однорідна тонка стрічка. Вважається, що вона переміщається із сталою швидкістю у поздовжньому напрямку (рис. 1). Стрічка характеризується певним початковим натягом, що забезпечується відповідними механізмами (наприклад, ведучим і веденим барабанами). Структура підтримки ідеалізована (циліндри), оскільки поверхня гнучкого двовимірного елемента контактує з барабанами у фіксованих місцях.

Пружна стрічка, що знаходиться між двома фіксованими границями, моделюється за допомогою двовимірного гнучкого тіла. Розглядаються лише її поперечні коливання.

Фізична модель описаної динамічної системи ґрунтується на певних припущеннях, які слід враховувати і під час побудови її математичної моделі:

– стрічка розглядається як гладка, неперервна поверхня;

– відносне переміщення будь-якої точки стрічки нормальне до площини тонкого горизонтального шару;

– відносне переміщення у площині недеформованої стрічки (поздовжні коливання) не враховуються;

– товщина стрічки у стані спокою є невеликою порівняно із найменшим радіусом кривизни, а її згинною жорсткістю можна знехтувати;

– матеріал гнучкого елемента вважається однорідним;

– натяг у стрічці є рівномірним у напрямку кожної із координатних осей: у напрямку осі OX він забезпечується конструкцією привідного механізму, а у напрямку осі OY – виникає внаслідок пружних властивостей гнучкого елемента.

На рис. 1 показано розрахункову модель двовимірного поздовжньо-рухомого гнучкого елемента та сили, які діють на нього. Схема є базовою для побудови математичної моделі – крайової задачі динамічного процесу.

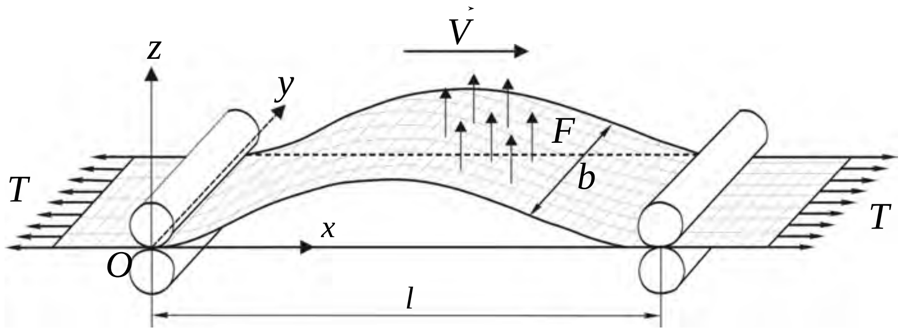

Рис. 1. Модель двовимірного поздовжньо-рухомого гнучкого елемента

Математична модель динаміки двовимірних гнучких елементів. Для побудови математичної моделі коливних процесів у гнучких тілах розглядається “динамічна ріновага” безмежно малого елемента середовища. Його можна охарактеризувати сукупністю механічних та фізичних параметрів [6]. До перших належить переміщення, швидкість, пришвидшення (зокрема і їхні проекції на осі координат) тощо. Фізичний же стан частинки визначається її густиною, кінетичною, потенціальною енергією тощо. Значення вказаних параметрів для кожного малого елемента середовища в усякий момент часу можуть змінюватися, тобто вони є функціями координат і часу.

На як завгодно безмежно малий елемент ширини dy та довжини dx у вертикальному напрямку діє поверхнева сила $F = F(x, y, t)$ (розглядаються тільки поперечні коливання). Переміщення у напрямку осі OZ позначимо через u і вважатимемо, що воно залежить від двох просторових координат та часової змінної $u = u(x, y, t)$. На рис. 2 схематично зображено описаний елемент середовища. Вважається, що максимальне відхилення від недеформованого положення виділеного елемента середовища є незначним, і це дає можливість сформулювати рівняння руху у межах теорії малих коливань [7-9].

Як було наголошено вище, деформація гнучкої стрічки, що є фізичною моделлю досліджуваних об’єктів, відбувається у напрямку осі, перпендикулярній до серединної поверхні. У той самий час переміщення у напрямку осей OX та OY у площині стрічки вважаються настільки малими, що ними можна знехтувати.

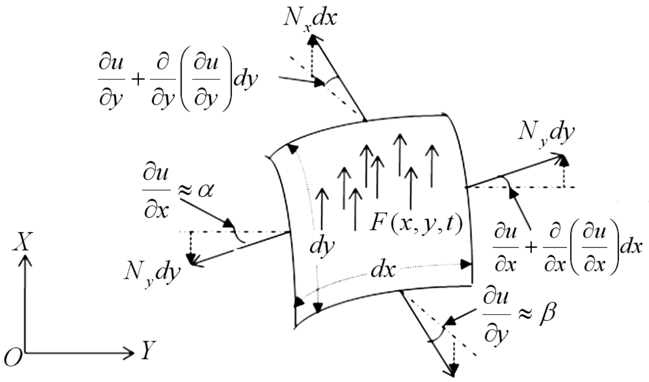

Рис. 2. Схема сил, які діють на умовно виділений фрагмент гнучкого елемента

Поверхнева сила, що діє на виділений елемент, дорівнює $F(x,y,t)dxdy$. Сили ж, що діють у серединній поверхні, дорівнюють добутку натягу на площу перерізу (у двовимірному випадку на довжину перерізу). Ці сили змінюються залежно від просторових координат, тому якщо у перерізі із координатою x діє сила $N_x dy$, то у сусідньому перерізі із координатою $x+dx$ – вже $\left(N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}\right)dy$. Аналогічні співвідношення можна записати і для другої осі. Для малих поперечних коливань справедливі такі співвідношення:

$$\alpha\approx\sin\alpha\approx tg\alpha=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \beta\approx\sin\beta\approx tg\beta=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1}$$

Отже, сума проекцій всіх сил на вертикальну вісь має вигляд

$$N_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdy+N_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdy+F(x,y,t)dxdy. \tag{2}$$

Скористаємось принципом Д’Аламбера [8] для запису рівняння “динамічної рівноваги” умовно виділеного фрагмента. “Зрівноважимо” проекції усіх сил на вертикальну вісь фіктивною силою інерції і отримаємо

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2}dxdy-N_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdy-N_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdy=F(x,y,t)dxdy, \tag{3}$$

де $\rho\frac{d^2u}{dt^2}dxdy$ – сила інерції; ρ – маса одиниці площі гнучкого елемента.

Із (3), після незначних спрощень, отримаємо диференціальне рівняння у змінних Лагранжа, що описує поперечні коливання гнучкого двовимірного елемента:

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2}-N_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-N_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(x,y,t). \tag{4}$$

Умови малості переміщень та деформацій, дають змогу у межах прийнятих допущень ототожнити змінні Ейлера та Лагранжа [6]. Тобто в остаточних співвідношеннях, що описують математичну модель досліджуваного об’єкта, частинні похідні по просторових координатах під час переходу від змінних Лагранжа до змінних Ейлера не змінюються. Згадане, однак, абсолютно не означає таку саму можливість для похідних по часовій змінній від функції переміщення.

Враховуючи вказане, і той факт, що складова швидкості руху у напрямку осі OY відсутня, а швидкість руху у поздовжньому напрямку є сталою величиною, що дорівнює V, у змінних Ейлера диференціальне рівняння (4) матиме такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-(\alpha^2-V^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,t\right), \tag{5}$$

де $\alpha^2=\frac{N_x}{\rho}$, $\gamma^2=\frac{N_y}{\rho}$.

Для малих деформацій розтяг прямо пропорційний до відносної деформації $N_x = \varepsilon_{xx} E$, і він спричиняє поздовжню деформацію $\varepsilon_{xx} = \frac{\mathrm{N_x}}{E}$, де E – модуль Юнга. У той самий час виникає деформація у поперечному напрямку $\varepsilon_{yy} = -\mu\varepsilon_{xx} = -\mu\frac{\mathrm{N_x}}{E}$, яка, своєю чергою, створює деякий натяг N_y у напрямку осі OY: $N_y = E\varepsilon_{yy} = -E\mu\varepsilon_{xx} = -\mu N_x$, де μ – коефіцієнт Пуассона.

Якщо T – інтенсивність сили натягу гнучкої довговимірної системи у напрямку осі OX, що забезпечується конструкцією привідного механізму, то для малих деформацій $N_x = T$, $N_y = -\mu T$. Отже, у рівнянні (5) $\alpha^2 = \frac{T}{\rho}$, $\gamma^2 = \frac{\mu T}{\rho}$.

Аналітичний опис контакту гнучкого елемента до ведучого та веденого барабанів забезпечують крайові умови [1–4, 10, 11]. Вони у разі відсутності поперечного переміщення гнучкого елемента на лінії дотику стрічки до барабанів набудуть вигляду

$$u(x, y, t)\big|_{x=0} = u(x, y, t)\big|_{x=l} = 0, \tag{6}$$

де l – віддаль між точками дотику гнучкого елемента до ведучого і веденого барабанів.

Отже, задача полягає у визначенні впливу усієї множини параметрів на розв’язок диференціального рівняння (5) за крайових умов (6).

Методика розв’язування. Нижче будемо досліджувати динамічні процеси у гнучких елементах, вважаючи, що зовнішні силові чинники відсутні. Тобто розглядатимемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - (\alpha^2 - V^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{7}$$

Його розв’язок за крайових умов (6), як показано у [10], має вигляд

$$u(x, y, t) = a[\cos(\kappa x + \delta y + \omega t + \varphi) - \cos(\chi x - \delta y - \omega t - \varphi)], \tag{8}$$

де є хвильові числа прямої та зворотної хвиль, а також частота процесу, які визначаються залежностями:

$$\kappa = \frac{\pi k}{l} + \frac{V\sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + \pi^2 k^2(\alpha^2 - V^2)}}{\alpha l\sqrt{\alpha^2 - V^2}}, \quad \chi = \frac{\pi k}{l} - \frac{V\sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + \pi^2 k^2(\alpha^2 - V^2)}}{\alpha l\sqrt{\alpha^2 - V^2}},$$

$$\omega = \frac{1}{\alpha l}\sqrt{\alpha^2 - V^2}\cdot\sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + \pi^2 k^2(\alpha^2 - V^2)}. \tag{9}$$

Із наведених співвідношень легко знайти величину поздовжньої швидкості руху, за якої відбувається зрив коливань $(V = \alpha)$. Набагато цікавішим є випадок, для якого відбувається так зване явище самозахоплення. Під цим терміном ми розумітимемо такий вплив поздовжньої швидкості на динамічний процес, для якого вона спричиняє “розповзання” зворотної (відбитої) хвилі з подальшим (для більших значень швидкості поздовжнього руху) поширенням двох хвиль в одному напрямку. Отже, умовою самозахоплення є

$$\frac{\pi k}{l} - \frac{V\sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + \pi^2 k^2(\alpha^2 - V^2)}}{\alpha l\sqrt{\alpha^2 - V^2}} < 0.$$

Наведене співвідношення дає змогу визначити швидкість поздовжнього руху, за якої настає вказане явище:

$$\chi = 0 \Rightarrow V^* = \frac{l\gamma\delta + \sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + 4\pi^2 k^2\alpha^2}}{2k\pi}.$$

Примітка. Із усієї множини розв’язків рівняння $\chi = 0$ ми вибираємо лише ті, що відповідають фізичній картині процесу.

Нижче, на рис. 3 показана залежність швидкості від параметрів α і γ, починаючи з якої відбувається якісно новий процес, тобто за $V < V^* < \alpha$ динамічний процес описується залежністю

$$u(x,y,t) = a\left[\cos(\kappa x + \delta y + \omega t + \varphi) - \cos\left(\chi^* x + \delta y + \omega t + \varphi\right)\right].$$

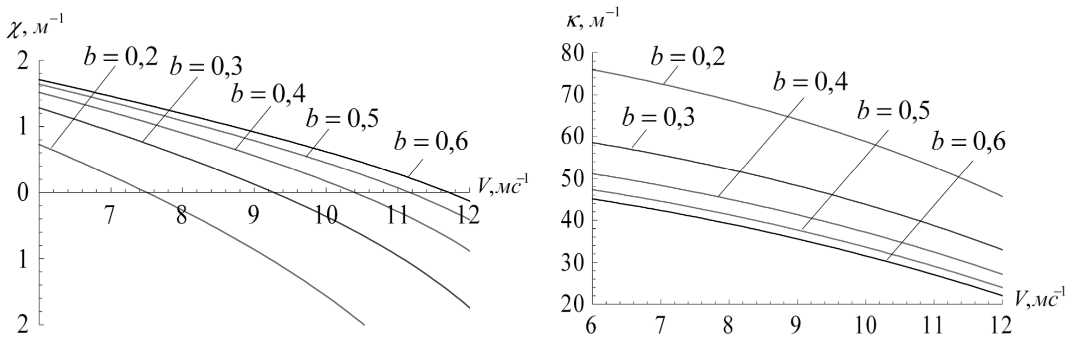

Рис. 3. Залежність хвильового часла відбитої хвилі (а) та частоти (б) від швидкості поздовжнього руху для таких значень параметрів: $l = 1$ *м*, $\alpha = 15$ *мс*$^{-1}$, $\gamma = 4{,}5$ *мс*$^{-1}$

Висновки. У роботі отримано узагальнену математичну модель, яка описує нелінійні коливання у двовимірних поздовжньо-рухомих гнучких елементах. Вона є базовою для дослідження динамічних процесів широкого спектра двовимірних гнучких елементів і враховує їх фізико-механічні, геометричні, кінематичні параметри, дію різної природи сил й крайові умови.

Для аналізу лінійних коливних процесів у двовимірних гнучких елементах механічних систем, що характеризуються поздовжнім рухом, запропоновано описання динамічного процесу у вигляді накладання двох хвиль (прямої та відбитої) різних довжин та однакових частот. Отримані залежності дають можливість визначити вплив фізико-механічних властивостей гнучкої системи, кінематичних та геометричних її параметрів на частоту власних коливань та довжини хвильових чисел, явища зриву коливань та самозахоплення.

1. Мартинців М. П., Сокіл М.Б. Одне узагальнення методу Д'Аламбера для систем, які характеризуються поздовжнім рухом // Зб. наук.-техн. пр. УДЛТУ. – Львів, 2003. – Вип. 13.4. – С. 64–67. 2. Сокіл М.Б. Вимушені коливання рухомих середовищ / М.Б. Сокіл // Динаміка, міцність та проектування машин і приладів: Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – 2006. – № 556. – С. 64–68. 3. Chen L.Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings / L.Q. Chen // Appl. Mech. Rev. – 2005.– Volume 58.2. – P. 91–116. 4. Lixin Z. Dynamic analysis of viscoelastic serpentine belt drive systems / Z. Lixin. – Kanada: Department of mechanical and industrial engineering university of Toronto, 1999. – 349 p. 5. Савилов А. В. Режым самозахвата электронов в СВЧ системе двухпучкового ускорителя / А. В. Савилов // Техническая физика. – 1966. – Т.66, №9. – С.148–163. 6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособ. для ун-тов / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с. 7. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 501 с. 8. Гаральд Іро. Класична механіка / пер. з нім. Р. Гайда, Ю. Головач. – Львів: ЛНУ ім. Ів. Франка, 1999. – 464 с. 9. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1991. – 651 с. 10. Хитряк О.І. Хвильова теорія у дослідженні процесів у двовимірних системах зі сталою складовою швидкості поздовжнього руху / О.І. Хитряк // Науковий вісник НЛТУ: Зб. наук.-техн. пр. – Львів, 2010. – Вип. 20.14. – С. 340–344. 11. Сокіл М.Б. Хвильова теорія руху в дослідженні коливань гнучких елементів приводу та транспортування з урахуванням їх поздовжнього руху / М.Б. Сокіл, О.І. Хитряк // Військово-технічний збірник. – Львів: АСВ, 2011. – Вип. 1. – С. 102–105.