

¹М.Б. СОКІЛ, ²Ю.А. ЧАГАН

¹ Національний університет “Львівська політехніка”,

² Академія Сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного

ВПЛИВ ЗМІННОЇ СИЛИ НАТЯГУ ТА ШВИДКОСТІ ПОЗДОВЖНЬОГО РУХУ НА СТІЙКІСТЬ КОЛИВАНЬ ГУСЕНИЧНОГО ОБВОДУ

© Сокіл М.Б., Чаган Ю.А., 2012

Запропоновано методику визначення впливу змінної сили натягу, швидкості поздовжнього руху та згинної жорсткості на динамічний процес та його стійкість у верхній вітці гусеничного обводу, яка побудована з використанням методу Бубнова–Гальоркіна у поєднанні із методом Ван дер Поля. Отримано аналітичні співвідношення, що описують основні параметри коливань гусеничного обводу за змінної в часі його сили натягу; проведено оцінку стійкості цих коливань.

The offered method of determination of influence of variable force of natyagu, rate of longitudinal movement and bend inflexibility, is on a dynamic process and his firmness in the overhead branch of caterpillar obvodu. It is built on the use of method of Bubnova-Galerkina in combination with the method of the Van-der-field. Analytical correlations which describe the basic parameters of vibrations of caterpillar obvodu at a variable in time of his force of natyagu are got, the estimation of firmness of these vibrations is conducted.

Вступ. Під час руху по пересіченій місцевості транспортні засоби піддаються дії різних перешкод. Незважаючи на те, що здебільшого перешкоди мають хаотичний характер розміщення, вони спричиняють значні коливання різних частин транспортних засобів, перевантаження екіпажу, знижують комфортабельність перевезення вантажів тощо. Для захисту екіпажу та вантажів від надмірних перевантажень застосовують різні види підвісок. Питання вибору характеристик підвіски тих чи інших транспортних засобів розглядають в [1–4]. До того ж такі важливі з практичного погляду задачі, як вибір найсприятливіших способів подолання навіть впорядкованої системи перешкод, не знайшли у літературі належного висвітлення. Деякі аспекти цієї важливої проблеми порушує ця робота. У ній, зокрема, досліджується вплив впорядкованої системи “точкових” перешкод на коливання верхньої вітки гусениці, умови її резонансних коливань, стійкості тощо. Відзначимо, що питання впливу поздовжньої швидкості руху на нелінійні поперечні коливання гнучких елементів вивчали у [5–8]. Розглядалась поведінка гнучких елементів як малої [5–7], так і значної згинної жорсткості [8]. Однак таке важливе із практичного погляду питання, як вплив змінної сили натягу та жорсткості на динаміку гнучких елементів у них, не досліджувались. З огляду на сказане, впливає актуальність цієї роботи.

Постановка завдання. Математичною моделлю згинних коливань верхньої частини гусеничного обводу за умов: а) маса є рівномірно розподілена вздовж її довжини; б) модуль пружності та момент інерції стосовно центральної осі є сталими; в) сила натягу є змінною величиною; г) нелінійні сили (сили опору згинним коливанням) є малими порівняно із найбільшим значенням сили натягу. Вважається, що транспортний засіб переміщається із постійною швидкістю. Із цього випливає, що поздовжня складова швидкості руху верхньої частини гусеничного обводу є

незмінною. Наведене дає змогу диференціальне рівняння згинних коливань гусеничного обводу записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} - \left(\frac{S(t)}{\rho} - V^2 \right) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\dot{A}^2}{\rho} \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \mathcal{E}f \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (1)$$

У (1) $u(x,t)$ – переміщення поперечного перерізу верхньої частини гусениці з ейлеровою координатою \bar{o} в довільний момент часу t у напрямку, перпендикулярному до недеформованої її осі; V – швидкість поздовжнього руху; $S(t)$ – сила натягу гусениці; ρ – маса одиниці довжини; \dot{A}^2 – згинна жорсткість (\dot{A} – динамічний модуль пружності, 2 – момент інерції перерізу гусениці); $\mathcal{E}f \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ – функція, яка описує нелінійні сили, що супроводжують динамічний процес; ε – малий параметр. Він вказує на таке: максимальне значення нелінійних сил порівняно із силою натягу ε малою величиною. До диференціального рівняння (1) долучаємо крайові умови вигляду:

$$u(x,t)|_{x=j} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=j} = 0, \quad j = 0, l, \quad (2)$$

де l – віддаль між точками дотику верхньої частини гусениці до ведучого та направляючого коліс.

Примітки: 1. У розглядуваній постановці задачі вважається, що точка контакту гусениці з ведучим та направляючим колесами має незмінну вертикальну координату. Точніша постановка крайових умов може бути предметом окремого розгляду.

Отже, метою роботи є дослідження впливу змінної в часі сили натягу та жорсткості на коливання та їх стійкість у верхній частині гусениці.

Методика розв'язування. Як наголошувалось вище, розглядувана математична модель коливань є слабко нелінійною. Це є основою для використання загальних ідей методів збурень за побудови розв'язку крайової задачі (1), (2). Використаємо їх у поєднанні із методом Бубнова–Гальоркіна [9]. Він дає змогу побудову розв'язку вказаної задачі звести до простішої задачі, а саме – інтегрування звичайного квазілінійного рівняння:

$$\frac{d^2 T_k}{dt^2} + \left(\frac{S(t)}{\rho} + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{\dot{A}^2}{\rho} - V^2 \right) \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 T_k = \bar{f} \left(T_k, \frac{dT_k}{dt} \right), \quad (3)$$

де T_k – невідомі функції; $\bar{f} \left(T_k, \frac{dT_k}{dt} \right) = \frac{2}{l} \int_0^l f \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) X_k(x) dx$, $\{X_k(x)\}$ – повна ортонормована система функцій, що задовольняє крайові умови, які випливають із (2), тобто $X_k(x)|_{x=j} = 0$. Найцікавішим із практичного боку є випадок, коли функція $S(t)$ є періодичною за t . Тому нижче розглянемо випадок, для якого сила натягу у верхній частині гусениці змінюється відповідно до закону

$$S(t) = S_0 + S_1 \cos \mu t, \quad (4)$$

де S_0, S_1 – сталі; μ – частота зовнішнього періодичного збурення, зумовленого дією на гусеницю системи впорядкованих перешкод, коли вони знаходяться на однаковій віддалі одна від одної: $d = \frac{\pi V}{\mu}$. Останнє дає змогу диференціальне рівняння (3) подати у вигляді

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = \omega^2 \alpha T + \gamma T \cos \mu t + \bar{f} \left(T, \frac{dT}{dt} \right), \quad (5)$$

де $\omega^2 = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{S_0}{\rho} + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{\dot{A}^2}{\rho} - V^2 \right) \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2$, $\gamma = \frac{S_1}{\rho}$.

Нехай найбільше значення додаткової сили натягу гусениці, зумовлене подоланням ТЗ перешкод, є малим порівняно із силою попереднього її натягу S_0 , тобто $S_0 \gg S_1$. Тоді з урахуванням

того, що максимальне значення правої частини є малим порівняно із ω^2 , для першого наближення поставленої задачі власна частота коливань верхньої частини гусениці визначається залежністю

$$\omega = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{S_0}{\rho} + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{A^2}{\rho}} - V^2. \quad (6)$$

На рис. 1 та 2 показано графічні залежності частоти власних коливань від швидкості та згинної жорсткості за таких значень параметрів: $l = 4,875 \text{ м}$, $\rho = 50 \text{ кг/м}$.

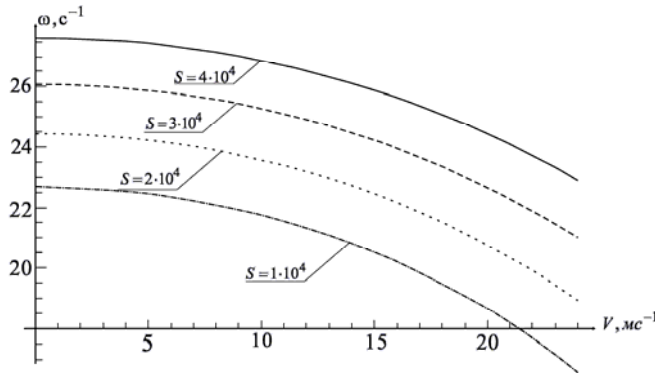


Рис. 1. Залежність частоти власних коливань від швидкості поздовжнього руху за різних значень сили натягу за $EI = 2500$

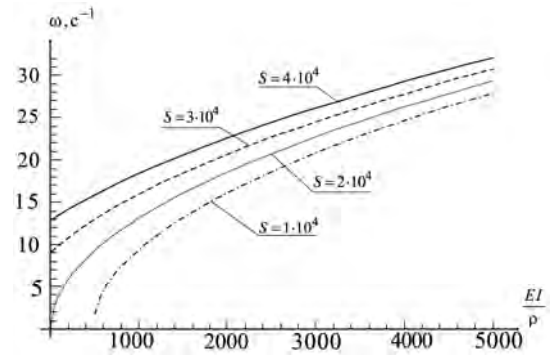


Рис. 2. Залежність частоти власних коливань від згинної жорсткості за різних значень сили натягу за $V = 20 \text{ м/с}$

Вони показують, що частота власних коливань верхньої частини гусениці:

- із зростанням сили натягу та згинної жорсткості – зростає;
- для більших значень поздовжньої швидкості є меншою;

– за швидкості поздовжнього руху $V = \sqrt{\frac{S_0}{\rho} + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{A^2}{\rho}}$ відбувається зрив коливань.

До того ж отримане диференціальне рівняння (5) є основою для ефективного та неефективного способу подолання досліджуваного типу перешкод. Під несприятливим способом подолання впорядкованої системи перешкод розумітимемо рух ГТЗ із такою поступальною швидкістю $\frac{V}{2}$, за якої частота власних коливань гусениці ω та частота зовнішнього періодичного (параметричного) збурення μ пов'язані співвідношенням: $m\omega = n\mu$, m, n – взаємно прості числа. Дослідимо

динамічний процес гусениці у випадку, коли $f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = -k_1 \frac{\partial u}{\partial t} + k_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, k_1, k_2 – сталі.

Диференціальне рівняння (5) тоді трансформується до вигляду

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = \omega^2 \alpha T + \gamma T \cos \mu t - \beta \frac{dT}{dt} + \lambda T^3, \quad (6)$$

де $\beta = k_1$, $\lambda = -\frac{1}{4} k_2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4$. Перше наближення розв'язку цього рівняння у разі $\omega \approx \mu$ шукатимемо [10] у вигляді

$$T = p \cos \omega t + q \sin \omega t. \quad (7)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів p та q із (6) отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\left(\omega^2 \alpha + \frac{3}{4} \lambda a^2 + \frac{\gamma}{2}\right) q + \omega \beta p = 0, \quad \omega \beta q - \left(\omega^2 \alpha + \frac{3}{4} \lambda a^2 - \frac{\gamma}{2}\right) p = 0. \quad (8)$$

Вона має відмінний від тривіального розв'язку вигляд:

$$\left(\omega^2\alpha + \frac{3}{4}\lambda a^2 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 - (\omega\beta)^2 = 0, \quad (9)$$

де $a = \sqrt{p^2 + q^2}$. Наведене співвідношення визначає амплітуду коливань та ширину резонансної області (α) залежно від параметрів системи:

$$a^2 = \frac{4}{3}\lambda \left(\frac{\gamma}{2} - \omega^2\alpha \pm \omega\beta\right), \quad \frac{\gamma}{2} - \omega^2\alpha \pm \omega\beta \geq 0; \quad (10)$$

$$\alpha = \alpha_+ - \alpha_- = \frac{1}{\omega^2} \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2\beta^2}. \quad (11)$$

На рис. 3 показано залежність резонансної амплітуди від розбалансування частот власних та вимушених коливань за різних значень сили натягу, швидкості поздовжнього руху та параметра згинної жорсткості для $\beta = 0,9$, $\lambda = 40$, $S_0 = 20000$, $S_1 = 1600$ та $V = 0$ - а) і $V = 10$ - б).

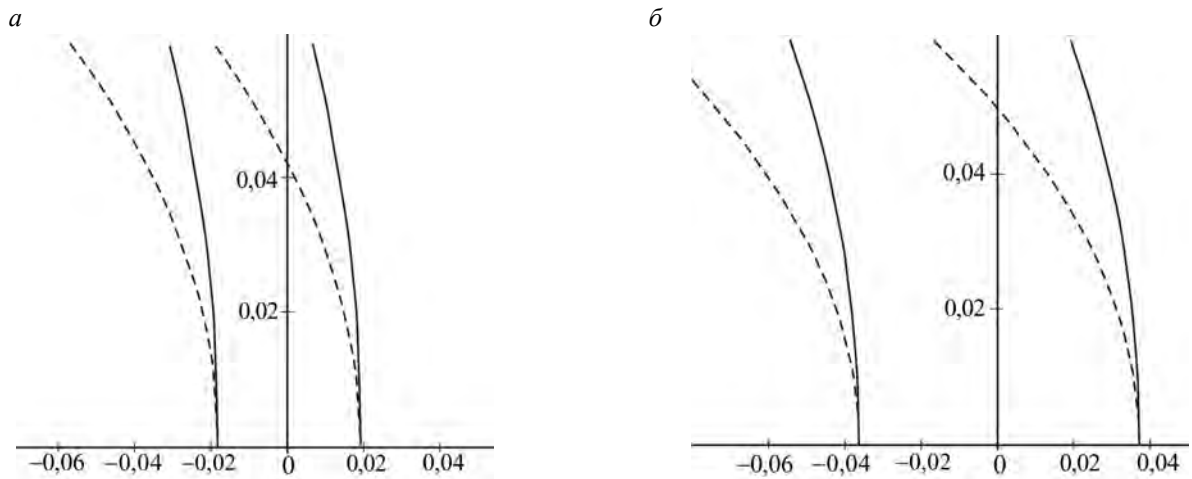


Рис. 3. Залежність резонансної амплітуди від розбалансування частот власних та вимушених коливань за різних значень швидкості поздовжнього руху

Стійкість коливань. Не менш важливою задачею для описання динамічного процесу є дослідження його стійкості. Оскільки рівняння (6) нелінійне, то для дослідження стійкості його розв'язку у першому наближенні розглянемо відповідне йому рівняння у варіаціях, тобто

$$\frac{\delta^2 v}{\delta t^2} + \omega^2 v = \omega^2 \alpha v + \gamma v \cos 9t - \beta \frac{\delta v}{\delta t} + 3\lambda T^2 v. \quad (12)$$

Рівняння у варіаціях є лінійним стосовно невідомої функції v . Воно належить до лінійних рівнянь із змінними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{\delta^2 v}{\delta t^2} - s(t) \frac{\delta v}{\delta t} + (\omega^2 - r(t))v = 0, \quad (13)$$

де $r(t), s(t)$ – неперервні 2π -періодичні по t функції. З урахуванням того, що функція $T(t)$ є розв'язком диференціального рівняння (6), то коефіцієнти $r(t)$ і $s(t)$ у випадку, що розглядається, мають вигляд

$$r(t) = \omega^2 \alpha + \gamma \cos 9t + 3\delta(r \cos \omega t + s \sin \omega t)^2, \quad s(t) = -\beta.$$

Для подальших досліджень рівняння (13) використаємо теорему Флоке [11]. Відповідно до неї розв'язок рівняння у варіаціях (13) шукатимемо у вигляді $v = e^{Kt} w(t)$, $w(t)$ – 2π -періодична

функція, κ – невідомий характеристичний показник. Як впливає із рівняння (13), невідома функція $w(t)$ повинна бути розв’язком диференціального рівняння:

$$\frac{\delta^2 w}{\delta t^2} + (2\kappa - q(t)) \frac{\delta w}{\delta t} + (\omega^2 r(t) - \kappa q(t) \kappa^2) w = 0. \tag{14}$$

З урахуванням того, що рівняння у варіаціях (14) відповідає нелінійному рівнянню (6), функцію $w(t)$ шукатимемо також у вигляді

$$w = p \cos \omega t + q \sin \omega t. \tag{16}$$

Коефіцієнти p, q у (16) знаходимо в подібний спосіб, як і під час знаходження розв’язку базового рівняння. Вищезазначене дає змогу отримати систему рівнянь для визначення невідомих параметрів p, q :

$$\left(\omega^2 \alpha - \frac{1}{2} \gamma - \kappa \beta - \kappa^2 + \frac{9}{4} \lambda a^2 \right) p - (\beta + 2\kappa) \omega q = 0, \left(\omega^2 \alpha + \frac{1}{2} \gamma - \kappa \beta - \kappa^2 + \frac{9}{4} \lambda a^2 \right) q + (\beta + 2\kappa) \omega p = 0. \tag{17}$$

Оскільки система (17) є лінійною однорідною, то її тривіальний розв’язок ($p = q = 0 \rightarrow a = 0$) існує за виконання умови

$$\omega^4 \alpha^2 - \frac{1}{4} \gamma^2 + (\beta^2 + 4\beta\kappa + 4\kappa^2) \omega^2 = 0. \tag{18}$$

Нетривіальні ж розв’язки визначаються рівнянням

$$\left(\omega^2 \alpha + \frac{9}{4} \lambda a^2 \right)^2 - \frac{1}{4} \gamma^2 + (\beta + 2\kappa)^2 \omega^2 = 0. \tag{19}$$

У разі тривіального розв’язку характеристичні показники набудуть значення:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \omega \pm \sqrt{\frac{1}{4} \gamma^2 - \omega^4 \alpha^2}}{2\omega}.$$

Отже, тривіальний розв’язок рівняння у варіаціях буде стійким за умов: $\kappa_1 < 0$ і $\kappa_2 < 0$, тобто

$$|\alpha| > \frac{1}{2\omega^2} \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2 \beta^2}.$$

Для нетривіального ж розв’язку умови його стійкості набувають такого вигляду:

$$\omega^2 \alpha > -\frac{9}{4} \lambda a^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \gamma^2 - \beta^2 \omega^2}, \quad \omega^2 \alpha > -\frac{9}{4} \lambda a^2 - \sqrt{\frac{1}{4} \gamma^2 - \beta^2 \omega^2}. \tag{20}$$

Наведені умови поділяють площину (a, α) на стійкі і нестійкі зони.

На рис. 4 та 5 зображені стійкі (заштрихована) і нестійкі зони нетривіального розв’язку рівняння (6) за різних значень швидкості руху та їх поведінки за зростання (спадання) параметра α для різних значень швидкості: $V = 10$ – а) і $V = 15$ – б).

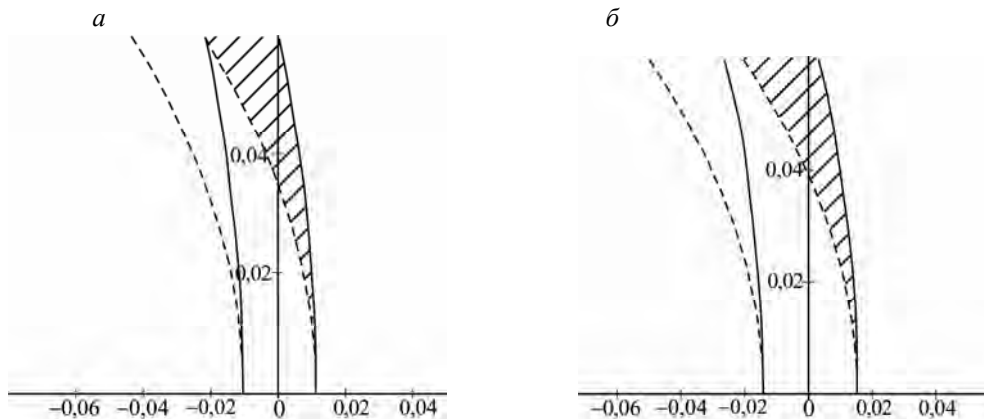


Рис. 4. Зони стійкості (заштрихована область) і нестійкості коливань гнучкого робочого елемента механічного приводу за швидкості його поздовжнього руху $V=10$ м/с $V=15$ м/с

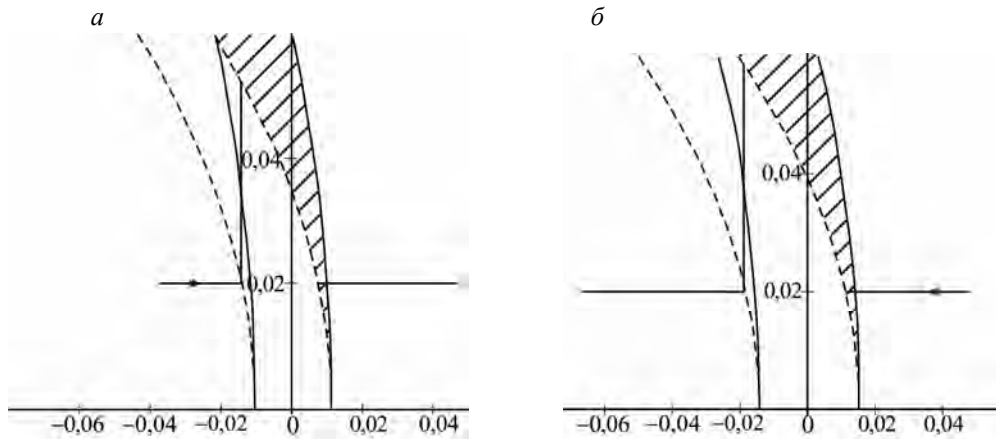


Рис. 5. Поведінка стійкого нетривіального розв'язку за зростання розбалансування (а) та спадання величини розбалансування (б)

Подані залежності показують: 1. За зростання параметра α зліва від резонансних кривих нетривіальний розв'язок стійкий до точки А за однакових значень амплітуди, в точці А величина резонансної амплітуди різко збільшується до точки В. У цій точці резонансна амплітуда приймає найбільше значення. За подальшого зростання α стійке значення резонансної амплітуди зменшується (рис. 5, а) – дуга кривої ВС). У точці С величина резонансної амплітуди коливань гнучкого елемента досягає такого самого значення, як і в точці А. 2. За зменшення параметра α (рис. 5, б) величина амплітуди, за якої нетривіальний розв'язок стійкий, однакова аж до точки С. З точки С до точки В її значення повільно зростає, наближаючись до точки В або і далі. Для того, щоб за подальшого спадання параметра α стійке значення амплітуди коливань мало таке саме значення, як і справа від резонансних кривих, то резонансне значення амплітуди (по дузі ВС) зростатиме лише до точки В.

Отже, за збільшення варіації частоти зліва від резонансної області за відповідних кінцевих збурень можливий стрибкоподібний перехід від стійкого тривіального до стійкого нетривіального розв'язку. Перехід до стійкого нетривіального розв'язку відбувається не пізніше, ніж у лівій кінцевій точці резонансної області, оскільки тривіальний розв'язок, починаючи з цієї точки, нестійкий. Резонансна зона відповідає області нестійкості. Стійкий нетривіальний розв'язок у правій кінцевій точці резонансної області неперервно переходить в стійкий тривіальний розв'язок.

Проведені аналітичні дослідження та представлені графічні залежності дають змогу зробити такі **загальні висновки**: 1. Із зростанням швидкості поздовжнього руху верхньої частини гусениці ширина резонансної зони збільшується. 2. За зменшення розбіжності частот (параметра α , за умови $\alpha > 0$) тривіальний розв'язок стійкий аж до правої кінцевої точки резонансної зони. 3. За зростання параметра α (за умови $\alpha < 0$) тривіальний розв'язок стійкий аж до лівої кінцевої точки резонансної зони. 4. У резонансній зоні тривіальний розв'язок нестійкий. 5. Лівіше від резонансної області існують стійкі нетривіальні розв'язки, які можуть виникати за малих збурень із стійких тривіальних; цей перехід до стійкого нетривіального розв'язку відбувається не пізніше, ніж у лівій кінцевій точці резонансної зони. 6. За збільшення розбіжності частот, якщо не діють відповідні кінцеві збурення, амплітуда, що відповідає лівій кінцевій точці резонансної зони, є найбільшою.

1. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. – М.: Машиностроение, 1972. – 392 с. 2. Пісарев В.П. *Можливості по компоновці нових пружних елементів підвіски, з прогресивною характеристикою, в межах існуючого конструктивного рішення бтр-60* / В.П. Пісарев, А.П. Горбунов // *Механіка та*

машинобудування. – 2009. – № 2. – С. 51–56. 3. Прентковский О.Л. Движение транспортного средства по неровной дороге / О.Л. Прентковский // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Междунар. сб. науч. тр. – Донецк: ДонНТУ, 2004. – Вып. 28. – С.137–141. 4. Дуценко В.В. Исследование возможностей повышения плавности хода модернизированной транспортной гусеничной машины на основе использования серийных узлов подвески / В.В. Дуценко, С.Н. Воронцов, И.В. Мусницкая // Механіка та машинобудування. – 1998. – № 1. – С. 83–88. 5. Chen L. Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings / L.Q. Chen // Appl. Mech. Rev. – 2005.– Volume 58.2. – P. 91–116. 6. Хитряк О.І. Резонансні коливання двовимірних гнучких елементів систем приводу та транспортування, що взаємодіють із зовнішнім середовищем / О.І. Хитряк, М.Б. Сокіл, Ю.А. Сенік // Зб. наук.-техн. пр. “Науковий вісник НЛТУ України”. – 2011. – Вип. 21.5. – С. 331–335. 7. Хитряк О. Асимптотичний метод у дослідженні впливу періодичних сил на нелінійні коливання гнучких елементів приводу / О. Хитряк, М. Сокіл // Вісник НУ „Львівська політехніка” „Динаміка, міцність та проектування машин і приладів”. – 2011. – Вип. 45. – С. 57–61. 8. Сокіл М.Б. Згинні коливання гнучких елементів систем приводів і структура розв’язку їх математичних моделей / М.Б. Сокіл // Вісник НЛТУ України”. – 2012. – Вип. 22.1. – С. 144–147. 9. Бабаков И. М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1965. – 560 с. 10. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики: [Учеб. пособие для ун-тов] / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 400 с. 11. Шмидт Г. Параметрические колебания / Г. Шмидт; пер. с нем. В.М. Старжинского; под ред. М.З. Литвина-Седого. –М.: Мир, 1978. – 336 с.