УДК 517.95

П.Я. ПУКАЧ
Національний університет “Львівська політехніка”

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЖИМУ ІЗ ЗАГОСТРЕННЯМ РОЗВ’ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ В РЕОЛОГІЧНІЙ МОДЕЛІ КОЛИВАНЬ ФОЙГТА–КЕЛЬВІНА

Досліджено питання існування режиму із загостренням розв’язку змішаної задачі для нелінійного еволюційного рівняння п’ятого порядку, яке узагальнює одне відоме рівняння теорії коливань. Одержано достатні умови неіснування глобального за часовою змінною розв’язку.

The paper deals with investigating of the blowup for a mixed problem for the fifth order nonlinear evolutional equation which generalizes some known equation of the vibrations theory. We obtain sufficient conditions of nonexistence of a global solution in time variable.

Вступ. Актуальність проблеми та огляд основних результатів. Нелінійне еволюційне рівняння п’ятого порядку з другою похідною за часовою змінною є нелінійним узагальненням відомого лінійного рівняння коливання балки Тимошенка (див. [1] та подану там бібліографію). Рівняння такого типу моделюють, зокрема, поширення збурень у в’язкопружному матеріалі, під дією зовнішніх ультразвукових аеродинамічних сил [2] та інші процеси подібної природи. Вказані рівняння та системи рівнянь узагальнюють модель коливання балки у середовищі з опором та є предметом дослідження у нелінійній теорії коливань та теорії пружності. Актуальність вивчення крайових задач для таких рівнянь та систем пояснюється проблемою зношування контактних поверхонь [1]. Зокрема, в [1] досліджено існування слабких розв’язків мішаних задач в обмеженій області D для системи двох лінійних еволюційних рівнянь з частинними похідними першого та другого порядку за часовою змінною, одна з невідомих функцій у якій описує вертикальне зміщення балки. Формулювання загальних математичних моделей динамічних контактів пружних структур, які описуються вищезгаданими рівняннями та системами, є сучасною та актуальною інженерно-технічною проблемою [3–5]. Зокрема, задача динамічного в’язкопружного тертя зі зношуванням вперше була сформульована у [3], у [4] досліджено динамічний контакт між балкою та рухомою поверхнею, термопружний контакт вивчено у [5].

Крайові задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних непарного порядку є предметом дослідження багатьох учених, починаючи з другої половини XX ст. [6–16]. Мішану задачу в обмеженій області для сильно нелінійного рівняння типу коливань балки вивчено у [6]. Аналогічну задачу у випадку слабко нелінійного рівняння та необмеженої за просторовими змінними області розглядали у [7], [8]. У [9] досліджено існування єдиного узагальненого розв’язку мішаної задачі для сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в області $\Omega\times(0,+\infty)$, де Ω – обмежена область та поведінка цього розв’язку за $t\to\infty$. У [10] у такій області вперше було досліджено мішану задачу для нелінійного рівняння третього порядку. Доведено існування єдиного класичного розв’язку, стійкого до збурень початкових даних, та досліджено поведінку цього розв’язку за $t\to\infty$. Крім того, в [11] знайдено умови існування локального та глобального розв’язку такої самої задачі у просторах Соболєва. Випадок, коли у головній частині рівняння показник нелінійності є функцією від просторових змінних, вивчено в [12]. Питання неіснування глобального за часовою змінною розв’язку, відомого як явище blowup, для рівнянь третього порядку вивчають у [13, 14], для гіперболічного рівняння четвертого порядку – в [15] (див. також подану там бібліографію). У [16], зокрема, знайдено достатні умови існування локального та неіснування глобального за часовою змінною розв'язку мішаної задачі для гіперболічного рівняння, у якому інтегральний доданок моделює так зване явище "пам'яті" в коливних процесах. Таке рівняння зустрічається під час описання математичної моделі розповсюдження поздовжніх хвиль в неоднорідному стрижні [17].

Постановка задачі. Нехай $T > 0$ – деяке число, $\Omega = [0; b^*]$. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau), \Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t = \tau\}$, $q > 2, p > 2.$ В області Q_T розглядаємо нелінійне рівняння п'ятого порядку:

$$u_{tt} + \left(a(x)u_{xxt}\right)_{xx} + \left(b(x)u_{xx}\right)_{xx} + \left(b_1(x)\,|\,u_{xx}\,|^{q-2}\,u_{xx}\right)_{xx} +$$

$$+\int_0^t g(t-\theta)(d(x)u_{xx}(x,\theta))_{xx}\,d\theta = c(x)\,|\,u\,|^{p-2}\,u \tag{1}$$

з початковими

$$u\,|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

$$u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$u\,|_{x=0} = u\big|_{x=b^*} = 0, \quad u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=b^*} = 0. \tag{4}$$

Задача (1)–(4) є узагальненням реологічної нелінійної моделі типу Фойгта – Кельвіна, яка описує коливання тіла, виготовленого з гнучкого матеріалу. При цьому у такій математичній моделі досліджується вплив внутрішнього тертя як результату розсіяння хвиль на випадкових неоднорідностях матеріалу [17, с. 62]. Якщо $T < +\infty$, то розв'язок називається *локальним*. Якщо $T = +\infty$, то розв'язок називається *глобальним*.

Мета роботи – встановити умови існування ефекту руйнування розв'язку (неіснування глобального розв'язку, режиму із загостренням) мішаної задачі (1)–(4) для нелінійного диференціального рівняння коливання балки, в якому присутній інтегральний доданок з четвертою похідною за просторовими змінними.

Виклад основного матеріалу. Припустимо виконання наведених нижче умов:

(*A*) $a(x)$ – двічі неперервно диференційовна функція, причому $a(x) > A$, $A > 0$;

(*B*) $b(x)$ – двічі неперервно диференційовна функція, причому $b(x) > B$, $B > 0$;

(*B1*) $b_1(x)$ – двічі неперервно диференційовна функція, причому $b_1(x) > b$, $b > 0$;

(*C*) $c(x) \geq c > 0$;

(*D*) $d(x)$ – двічі неперервно диференційовна функція, причому $d(x) > d \geq 0$;

(*G*) $g(t) \geq 0, g'(t) \leq 0$

для усіх $t \in [0; +\infty)$;

$$0 \leq \int_0^{+\infty} g(t)dt = G < +\infty, \quad B - Gd \equiv l > 0;$$

(*U*) $u_0 \in L^{2p-2}(\Omega)$ – неперервно диференційовна чотири рази функція;

$|\,u_{0,xx}\,|^{q-3}\,u_{0,xxx}^2$ – інтегровна з квадратом функція для усіх $x \in [0; b^*]$;

u_1 – неперервно диференційовна чотири рази функція.

Виконуючи умови $(A),(B),(B1),(C),(G),(D),(U)$, $p>2$, $q>2$, можна вказати такий скінченний момент часу T, який залежить від коефіцієнтів, правої частини рівняння та початкових даних, що розв'язок u задачі (1)–(4) в області Q_T існує [18, с. 28]. Отриманий результат свідчить про існування локального за часовою змінною розв'язку розглядуваної задачі. Встановлення наведеного результату проведено за допомогою методу Фаедо–Гальоркіна [19, с. 22].

У цій роботі покажемо, що нелінійні коливні системи, які моделюються задачами вигляду (1)–(4), є нестійкими щодо малих збурень початкової енергії, тобто у таких системах існують так звані режими із загостренням.

Далі використовуватимемо скорочення: $\| v \|_r = \| v \|_{L^r(\Omega)} = \left(\int_\Omega | v |^r dx \right)^{1/r}$, $r>1$. Враховуючи теорему вкладення Соболєва, маємо $H^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, тобто

$$\| u \|_p \le B^* \| u_{xx} \|_2, \quad B^* > 0.$$

Нехай B – найкраща стала у теоремі вкладення Соболєва. Позначимо $B_1 = B^* l^{-1/2}$, $C = \max\limits_\Omega | c(x) |$, $A = \max\limits_\Omega | a(x) |^2$.

Введемо функціонал енергії нелінійної коливної системи:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} [u_t^2 + b(x)(u_{xx})^2] dx + \frac{1}{q}\int_{\Omega_t} b_1(x) | u_{xx} |^q dx -$$

$$- \frac{1}{p}\int_{\Omega_t} c(x) | u |^p dx + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\theta) \int_{\Omega_\theta} d(x) | u_{xx}(x,\theta) - u_{xx}(x,t) |^2 dx d\theta -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t g(\theta) d\theta \int_{\Omega_t} d(x) | u_{xx}(x,t) |^2 dx, \quad t \in [0,T). \tag{5}$$

Нехай $E_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) C^{-\frac{2}{p-2}} B_1^{-\frac{2p}{p-2}}$. Покажемо, що у випадку

$$2 < q < \frac{p+2}{2}, \quad E(0) < E_1, \quad \| u_{0,xx} \|_2 > \sqrt{\frac{E_1}{B} \cdot \frac{2p}{p-2}}$$

існує такий момент часу $T^* \in (0,T]$, для якого $\lim\limits_{t \to T^*-0} \int_{\Omega_t} | u |^p dx = +\infty.$

Справді, нехай функція u – глобальний розв'язок задачі (1)-(4). Тоді

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega_t} \left[u_t^2 + b(x)(u_{xx})^2 \right] dx + \frac{1}{q}\int_{\Omega_t} b_1(x) | u_{xx} |^q dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega_t} c(x) | u |^p dx \right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} a(x)(u_{xxt})^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\theta) \int_{\Omega_\theta} d(x)(u_{xx}(x,\theta))^2 dx d\theta = 0 . \tag{6}$$

Перетворення інтегралів рівності (6) дають змогу отримати оцінку

$$E'(t) = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}\left[u_t^2 + b(x)(u_{xx})^2\right]dx + \frac{1}{q}\int_{\Omega_t} b_1(x)\,|\,u_{xx}\,|^q\,dx -$$

$$-\frac{1}{p}\int_{\Omega_t} c(x)\,|\,u\,|^p\,dx] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_0^t g(t-\theta)\int_{\Omega_\theta} d(x)\,|\,u_{xx}(x,\theta) - u_{xx}(x,t)\,|^2\,dxd\theta -$$

$$-\int_0^t g(\theta)d\theta\int_{\Omega_t} d(x)\,|\,u_{xx}(x,t)\,|^2\,dx] \le -\int_{\Omega_t} a(x)(u_{xxt})^2\,dx < 0$$

для усіх $t \in [0,T)$.

Звідси після перетворень та оцінок, аналогічних до [16], робимо висновок, що правильна оцінка

$$E(t) \ge \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{CB_1^p}{p}\xi^p \equiv h(\xi),$$

де

$$\xi = B - d\int_0^t g(\theta)d\theta)\,\|\,u_{xx}\,\|_2^2 + \|\,u_t\,\|_2^2 + \frac{2}{q}\int_{\Omega_t} b_1(x)\,|\,u_{xx}\,|^q\,dx +$$

$$+\left[\int_0^t g(t-\theta)\int_{\Omega_\theta} d(x)\,|\,u_{xx}(x,\theta) - u_{xx}(x,t)\,|^2\,dxd\theta\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Зрозуміло, що $\xi_0 = C^{-\frac{1}{p-2}} B_1^{-\frac{p}{p-2}}$ – точка максимуму функції h, оскільки $h'(\xi) = \xi - CB_1^p\xi^{p-1}$. Отже, $h(\xi_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) C^{-\frac{2}{p-2}} B_1^{-\frac{2p}{p-2}} = E_1 > E(0)$. Тому існує таке $\beta > \xi_0$, що $h(\beta) = E(0)$.

Можна також показати, що у випадку

$$E(0) < E_1, \quad \|u_{0,xx}\|_2 > \sqrt{\frac{E_1}{B}\frac{2p}{p-2}}$$

правильною є оцінка

$$\frac{1}{2}\left(B - d\int_0^t g(\theta)d\theta\right)\|\,u_{xx}\,\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\,u_t\,\|_2^2 + \frac{1}{q}\int_{\Omega_t} b_1(x)\,|\,u_{xx}\,|^q\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\theta)\int_{\Omega_\theta} d(x)\,|\,u_{xx}(x,\theta) - u_{xx}(x,t)\,|^2\,dxd\theta \le E(0) + \frac{C}{p}\int_{\Omega_t} |\,u\,|^p\,dx. \qquad (7)$$

Нехай $H(t) = E_1 - E(t)$. На підставі (7) одержимо

$$\frac{1}{2}(B-l)\,\|\,u_{xx}\,\|_2^2 \le \frac{1}{2}(B_2 - d_2\int_0^t g(\theta)d\theta)\,\|\,u_{xx}\,\|_2^2 \le E(t) - \frac{1}{2}\|\,u_t\,\|_2^2 -$$

$$-\frac{1}{q}\int_{\Omega_t} b_1(x)\,|\,u_{xx}\,|^q\,dx - \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\theta)\int_{\Omega_\theta} d(x)\,|\,u_{xx}(x,\theta) - u_{xx}(x,t)\,|^2\,dxd\theta + \frac{1}{p}\int_{\Omega_t} c(x)\,|\,u\,|^p\,dx.$$

Оскільки $H'(t) > 0, \quad t \in [0,T)$, то $H(t) \geq H(0) = E_1 - E(0) > 0$. Крім того, можна одержати оцінку

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{C}{p} \| u \|_p^p, \quad \forall t \in [0,T).$$

Нехай далі

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega_t} u u_t \, dx,$$

$\varepsilon > 0, \alpha \in (0,1)$ – довільні числа. Тоді одержимо

$$L'(t) = (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega_t} u_t^2 \, dx + \varepsilon \int_{\Omega_t} u_{tt} u \, dx =$$

$$= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega_t} u_t^2 \, dx + \varepsilon \int_{\Omega_t} [c(x) | u |^p - \ ax)\left(u_{xxt}\right)^2 - b(x)\left(u_{xx}\right)^2 b_1(x) \, | \, u_{xx} \, |^q \,] dx \ +$$

$$+\varepsilon \int_0^t g(t-\theta) \int_{\Omega_\theta} d(x) u_{xx}(x,\theta) u_{xx}(x,t) \, dx d\theta \, .$$

Оскільки за умовами на показники нелінійностей маємо

$$q < \frac{p+2}{2},$$

то, поклавши $\alpha = \dfrac{q-2}{p}$, одержимо

$$\alpha < \frac{1}{2} \text{ і } 2 \leq \frac{2}{1-2\alpha} \leq p \, .$$

Використовуючи оцінки вкладення просторів $L^{2+p\alpha}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, запишемо

$$H^\alpha(t) \|u_{xx}\|_2^2 \leq (\frac{C}{p})^\alpha \ \| \, u \, \|_p^{p\alpha} \ \|u_{xx}\|_2^2 \leq (\frac{C}{p})^\alpha B^{p\alpha} \|u_{xx}\|_2^{p\alpha} \|u_{xx}\|_2^2 \leq (\frac{CB^p}{p})^\alpha \times$$

$$\times \|u_{xx}\|_2^{p\alpha+2} \leq (\frac{CB^p}{p})^\alpha C_3 \|u_{xx}\|_q^{p\alpha+2} = C_4 \|u_{xx}\|_q^q, \qquad C_0 = (\frac{C}{p})^\alpha B^{p\alpha} C_*, \quad C_* > 0,$$

$$\|u\|_2^{\frac{2}{1-2\alpha}} \leq C_1(\|u\|_2^2 + \|u\|_p^p), \quad \|u\|_2^2 \leq C_2 \|u_{xx}\|_2^2 \leq C_2[-H(t) + C_3 \|u\|_p^p],$$

$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 > 0$.

Тому одержимо

$$L'(t) \leq C_4[-H(t) + \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_q^q + \|u_t\| \, |_2^2 + \|u\|_p^p +$$

$$+\int_0^t g(t-\theta) \int_{\Omega_\theta} | \, u_{xx}(x,\theta) - u_{xx}(x,t) \, |^2 \, dx d\theta], \quad C_4 > 0.$$

Умови на вихідні дані забезпечують можливість отримати нерівність:

$$L'(t) \geq C_5 [L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C_5 > 0. \tag{8}$$

Проінтегрувавши обидві частини (8) за змінною τ від 0 до t, отримаємо оцінку

$$L(t) \geq \frac{1}{\left[L(0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \dfrac{C_6 \alpha}{1-\alpha} t \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}, \ C_6 > 0. \tag{9}$$

Оскільки

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_{\Omega_0} u_0(x) u_1(x) dx,$$

то, враховуючи нерівність $H(0) > 0$, можна за рахунок вибору достатньо малого $\varepsilon > 0$ отримати $L(0) > 0$. Тоді з (9) випливає існування такого $T^* \in (0,T]$, що

$$\lim_{t \to T^* - 0} \int_{\Omega_t} |u|^p dx = +\infty.$$

Отже, u не може бути глобальним розв'язком задачі (1) – (4) в області Q_T, тобто у деякий момент часу обов'язково відбувається руйнування розв'язку.

Висновок. Теоретично встановлено існування класів нелінійних реологічних коливних систем з дисипацією, в яких існують режими із загостренням. Отримано співвідношення між показниками нелінійності у такому режимі.

1. Gu R.J., Kuttler K.L., Shillor M., Frictional wear of a thermoelastic beam, Journ. Math. Anal. And Appl., ***242,*** *2000. – P. 212–236. 2. Hughes T.J., Marsden J.E., Mathematical foundation of elasticity, Endlewood C. Prentice Hall, 1983. 3. Strųmberg N., Johansson L., Klarbring A., Derivation and analysis of a generalized standard model for a contact friction and wear, Intern. Journ. Solids Structures,* ***13****, 1996. – P. 1817–1836. 4. Andrews K.T., Shillor M., Wright S., On the dynamic vibrations of an elastic beam in frictional contact with a rigid obstacle, Journ. Elasticity. –* ***42****, 1996. – P. 1–30. 5. Martins J.A.C., Oden J.T., Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with normal and friction interface laws, Nonlin. Anal.,* ***11****, 1987. – P. 407–428. 6. Пукач П.Я. Змішана задача для одного сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в обмеженій області // Прикладні проблеми мех. та матем. – 2006. – Вип. 4. – С. 59–69. 7. Пукач П.Я. Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області // Математичні студії. – 2007.–* ***27****, № 2. – С. 139–148. 8. Пукач П.Я. Мішана задача для одного нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області // Наук. вісн. Чернівецького нац. ун-ту. "Математика". – 2006. – Вип. 314–315. – С. 159–170. 9. Clark H.R., Elastic membrane equation in bounded and unbounded domains, Electronic Journ. of Qualitative Theory of Diff. Equat., 2002. – No 7. – P. 1–21. 10. James M. Greenberg, Richard C. Mac Camy, Victor J. Mizel, The equation* $\sigma'(u_x)u_{tt} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$*, Journ. of Mathem. and Mechan., 1968,* ***17****. – No 7. – P. 707–728. 11. Graham Andrews, On the existence of solution to the equation* $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$*, Journ. of Diff. Equat., 1980,* ***35. –*** *P. 200–231. 12. Бугрій О., Доманська Г., Процах Н. Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 44–61. 13. Yang Zhijian, Song Changming, Blowup of solutions for a class of quasilinear evolution equations, Journ. of Nonlin. Analysis. Theory. Methods and Appl. – 1997. –* ***28. –*** *No. 12. – P. 2017–2032. 14. Messaoudi Salim A., Blow-up of positive-initial-energy solutions of nonlinear viscoelastic hyperbolic equation, Journ. of Mathem. Anal. and Appl. – 2006. –* ***320. –*** *P. 902–915. 15. Liu Yacheng, Xu Runzhang, A class of fourth order wave equations with dissipative and nonlinear strain terms, Journ. of Diff. Equat, 2008,* ***224. –*** *P. 200–228. 16. Лавренюк С.П., Панат О.Т. Необмеженість розв'язків одного гіперболічного рівняння третього порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. –* ***51****, № 3. – С. 27–34. 17. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с. 18. Пукач П.Я. Про існування локальних розв'язків мішаної задачі для нелінійного еволюційного рівняння п'ятого порядку // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. –* ***625****. – С. 27–34. 19. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.*