

В.С. ЛОВЕЙКІН¹, Ю.В. ЧОВНЮК¹, К.І. ПОЧКА²

¹ Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ),

² Київський національний університет будівництва і архітектури

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНІ СИСТЕМИ УДАРНО-ВІБРАЦІЙНОГО ТИПУ: МОДЕЛЮВАННЯ ТА КІНЕМАТИЧНО-СИЛОВИЙ АНАЛІЗ ВЗАЄМОДІЇ РОБОЧОГО ОРГАНА МАШИНИ З ОБРОБЛЮВАНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

© Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Почка К.І., 2012

Проведений кінематично-силовий аналіз взаємодії робочого органа машин ударно-вібраційного типу з оброблюваним середовищем на основі фізико-механічних та математичних моделей дискретно-континуальних систем.

The kinematic power analysis as to the machine working tool of the shock and vibration type interworking with the job surface based on the physical and mechanical and mathematical models of the discrete-continuum systems has been performed.

Постановка проблеми. Відомо, що в останні роки одним з найперспективніших методів будівництва, який забезпечує високі темпи спорудження сучасних будівель та споруд промислового та цивільного призначення, є каркасно-блочне та блочне будівництво. При цьому під час спорудження конструкцій можуть використовуватись блоки, виготовлені з бетону, з високими тепло- та звукоізоляційними показниками.

Формування таких виробів виконується на устаткуванні, яке здебільшого виготовляється силами і коштами самих підприємств або місцевих будівельних організацій. На жаль, відформовані в такий спосіб за допомогою існуючого обладнання виробу не завжди відповідають стандартам та вимогам за низкою показників, а саме: міцністю, тріщиностійкістю, морозостійкістю. Остання обставина зумовлена цілковитою відсутністю загальноприйнятого підходу до визначення параметрів та оцінки ефективності робочого процесу, застосування ефективних фізико-механічних та математичних моделей, які б враховували (науково обгрунтовано) сили опору оброблюваного середовища (будівельної/бетонної суміші) як системи з розподіленими та зосередженими параметрами, тобто системи дискретно-континуального типу.

Вирішити проблему, що виникла, можна створенням керованих вібраційних машин з науково обгрунтованими технологічними показниками. Отже, дослідження процесів взаємодії робочого органа вібраційної машини з оброблюваним середовищем, яке моделюється системою дискретно-континуального типу, є актуальним завданням.

Доволі ефективними, на думку авторів, для ущільнення будівельних/бетонних сумішей є машини ударно-вібраційного типу. Вони доволі ефективні під час формування багатьох виробів з бетону, мають багато переваг, які насамперед полягають у можливості ефективного формування будівельних виробів із жорстких бетонних сумішей за негайного зняття опалубки, що, своєю чергою, сприяє істотному підвищенню продуктивності виробництва загалом, зменшує металомісткість оснащення за рахунок скорочення тривалості обороту форм, знижує витрати енергії під час термообробки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На думку авторів, проводити дослідження процесу взаємодії робочого органа ударно-вібраційної машини з оброблюваним середовищем (будівельною/бетонною сумішшю) слід методами, розробленими Я.Г. Пановком [1–3], а дискретно-континуальні властивості вказаного середовища враховувати за допомогою підходів, розвинених у

[4]. Вивчення особливостей функціонування вказаних систем, які можуть бути кваліфіковані такими, що мають параметричні властивості, необхідно здійснювати за алгоритмами роботи [5].

Мета роботи – встановити основні закономірності функціонування, кінематично-силових параметрів взаємодії робочого органа ударно-вібраційної машини з оброблюваним середовищем (будівельною/бетонною сумішшю), що розглядається у межах моделі дискретно-континуального типу, яка ефективно описує процес передачі вказаній суміші імпульсів, що виникають внаслідок збудження в останній коливач, хвилеутворень, ударів та вібрацій.

Виклад основного матеріалу дослідження. У [6–13] показано конструктивну схему ударно-вібраційної установки для ущільнення виробів із бетонних сумішей та алгоритм розрахунку її кінематично-силових параметрів, основних характеристик робочих режимів. Проте схема, яка використовується для визначення опору оброблюваного середовища і враховує його інерційні властивості (приєднану масу), є невдалою і має істотні помилки, неточності. Нижче показано науково обґрунтовану схему і алгоритм розрахунку подібних систем.

Типову конструкцію ударно-вібраційної установки для ущільнення виробів із бетонних сумішей показано на рис. 1.

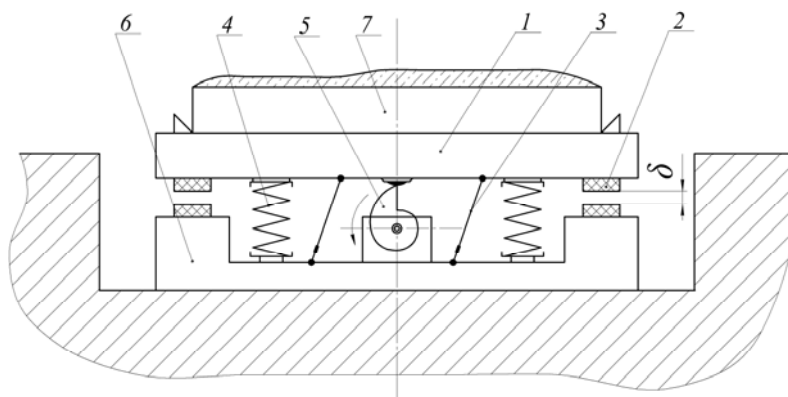


Рис. 1. Конструкція (типова) ударно-вібраційної установки для ущільнення виробів із будівельних/бетонних сумішей: 1 – рухома рама; 2 – пружні опори; 3 – ресори; 4, 6 – пружні елементи; 5 – кулачковий механізм; 7 – форма з сумішшю

Установка складається з рами 1, яка являє собою жорстку коробчасту конструкцію і складається, своєю чергою, зі звареної рами з профільного металу, зашитої металевими листами. У нижній частині рухомої рами і у верхній частині основи розташовані пружні прокладки 2. Рухома рама кріпиться стосовно основи за допомогою похило встановлених ресор 3, а також додатково взаємодіє з пружними елементами 4, жорсткість яких можна регулювати. У дію пристрій приводиться за допомогою кулачкового механізму 5, який здійснює оберти за допомогою електродвигуна.

Робочий профіль кулачка виконаний так, що рух рухомої рами під час її підйому відбувається по косинусоїді. На рис. 2 показаний графік, що описує закон кінематичного збудження коливач у графічному вигляді.

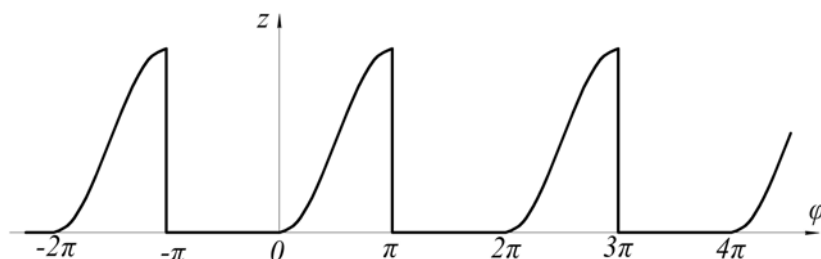


Рис. 2. Закон кінематичного збудження коливач у графічному вигляді

При цьому закон кінематичного збудження коливань рухомої рами у вертикальному напрямку може бути представлений так:

$$z(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi \leq \varphi \leq 0; \\ A \cdot (1 - \cos \varphi), & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi, \end{cases} \quad (1)$$

де $z(\varphi)$ – переміщення рухомої рами у вертикальному напрямку залежно від кута повороту кулачка φ ; A – амплітуда переміщень.

Функція $z(\varphi)$ кусково монотонна й обмежена на відрізку $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Розрахункову схему установки ударно-струшувальної типу показано на рис. 3.

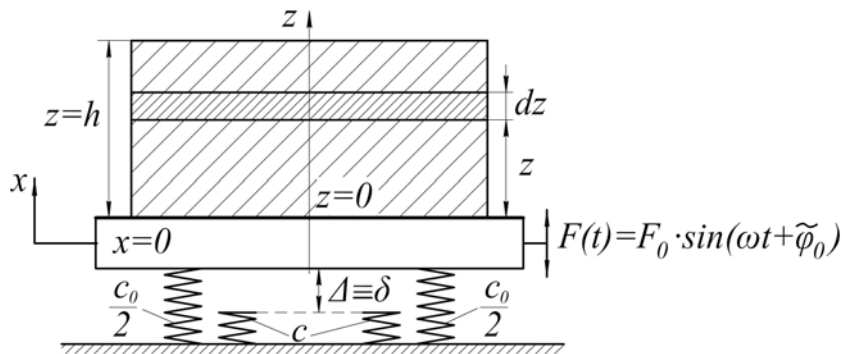


Рис. 3. Розрахункова схема ударно-струшувальної установки для ущільнення будівельної/бетонної суміші (модель дискретно-континуального типу)

На рис. 3 введено такі позначення: $\Delta \equiv \delta$ – зазор між пружинами жорсткістю (сумарною) c_0 та c ; $F(t)$ – вимушена сила, прикладена до піддона, координата руху якого x (F_0 – амплітуда цієї сили, ω – її кругова частота коливань, t – час, $\tilde{\varphi}_0$ – початкова фаза коливань); h – висота суміші у формі; z – координата у просторі суміші, яка вважається системою з розподіленими параметрами, і такою, що вільна від напружень на поверхні $z = h$. Відлік впродовж осі Oz здійснюється від поверхні піддона, який приймається системою із зосередженими параметрами і характеризується узагальненою координатою руху x . Загалом система, зображена на рис. 3, характеризується як система дискретно-континуального типу.

Розкладаючи $z(\varphi)$ у ряд Фур'є, вважаємо, що $\varphi = \Omega \cdot t$, де Ω – частота обертання кулачка, $1/c$, тоді:

$$z(t) = \frac{A}{2} \cdot (1 - \cos \Omega \cdot t) + \frac{A}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k \cdot \Omega \cdot t), \quad (2)$$

де

$$b_k = \left[\frac{(-1)^{k+1} + 1}{k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{k+1} - 1}{(k+1)} - \frac{\sin^2\left(\frac{k-1}{2} \cdot \pi\right)}{(k-1)} \right], \quad (3)$$

при цьому останній член у виразі b_k за $(k-1) \rightarrow 0$ слід розкривати за правилом Лопіталля (і дорівнює у цьому випадку нулю).

З розкладу (2) і (3) бачимо, що у законі руху $z(t)$, крім вищих гармонік ($k \cdot \Omega$, $k \geq 1$), присутня й одна гармоніка субрезонансу на половинній частоті ($\frac{\Omega}{2}$), оскільки

$$z(t) = \frac{A}{2} \cdot (1 - \cos \Omega \cdot t) + \frac{A}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k \cdot \Omega \cdot t) = A \cdot \sin^2\left(\frac{\Omega \cdot t}{2}\right) + \frac{A}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k \cdot \Omega \cdot t). \quad (4)$$

Визначимо необхідні кінематичні характеристики, які потрібні для подальшого дослідження:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t) = \frac{A}{2} \cdot \Omega \cdot \sin \Omega \cdot t + \frac{A}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot k \cdot \Omega \cdot \cos(k \cdot \Omega \cdot t); \quad (5)$$

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t) = \frac{A}{2} \cdot \Omega^2 \cdot \cos \Omega \cdot t + \frac{A}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot (-k^2 \cdot \Omega^2) \cdot \sin(k \cdot \Omega \cdot t). \quad (6)$$

Для визначення приєднаної маси m_{np} , що бере участь у коливаннях разом з масою машини, яка коливається, m_M , використаємо підхід, розвинений у [4].

Необхідно розв'язати диференціальне рівняння у частинних похідних (хвильове рівняння) для стовпа суміші заввишки h , яке має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2}; \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (7)$$

де $u(z, t)$ – переміщення у стовпі суміші, яке є функцією просторової (z) та часової (t) координат; E – модуль пружності, що характеризує цю суміш під час деформацій “стискування-розтягу”; ρ – щільність суміші.

Граничні умови при цьому мають таку форму:

$$m_M \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -E \cdot S \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad (8)$$

де S – площа піддона форми, у якій знаходиться суміш. Друга гранична умова у (8) означає, що поверхня суміші $z = h$ (рис. 3) вільна від напружень.

Якщо поділити першу умову (8) зліва та справа на масу суміші $m_c = \rho \cdot S \cdot h$, тоді цю умову можна подати по-іншому:

$$\begin{aligned} m_M \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -E \cdot S \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} &\Leftrightarrow \frac{m_M}{\rho \cdot S \cdot h} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -\frac{a^2}{h} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -\frac{a^2}{h} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -\frac{a^2}{m \cdot h} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -(\bar{c})^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}; &\quad (\bar{c})^2 = \frac{a^2}{m \cdot h}; \quad m = \frac{m_M}{\rho \cdot S \cdot h}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отже, слід розв'язати рівняння (7) за таких умов (граничних):

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -(\bar{c})^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (10)$$

Початкові умови задачі такі:

$$\begin{cases} u(z,t)|_{t=0} = 0, & 0 \leq z \leq h; \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, & \text{при } 0 < z \leq h; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = +z, & \text{при } z = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Значимо, що значення \dot{z} у початкових умовах (11) визначається з (5).

Згідно з методом Фур'є, частинні розв'язки рівняння (7) шукатимемо у вигляді [4]:

$$u(z,t) = T(t) \cdot Z(z); \quad (12)$$

тоді отримаємо рівняння:

$$T''(t) + a^2 \cdot \lambda^2 \cdot T(t) = 0; \quad (13)$$

$$Z''(z) + \lambda^2 \cdot Z(z) = 0. \quad (14)$$

Щоб функція (12), відмінна від тотожного нуля, задовольняла граничним умовам (10), слід вимагати виконання умов:

$$Z'(h) = 0; \quad -(\bar{c})^2 \cdot Z'(0) - a^2 \cdot \lambda^2 \cdot Z(0) = 0. \quad (15)$$

Отже, ми приходимо до задачі про власні числа для рівняння (14) за граничних умов (15).

Інтегруючи рівняння (14), отримаємо

$$Z(z) = C_1 \cdot \cos(\lambda \cdot z) + C_2 \cdot \sin(\lambda \cdot z). \quad (16)$$

З граничних умов (15) знаходимо

$$\begin{cases} -\lambda \cdot C_1 \cdot \sin(\lambda \cdot h) + \lambda \cdot C_2 \cdot \cos(\lambda \cdot h) = 0; \\ (\bar{c})^2 \cdot \lambda \cdot C_2 - a^2 \cdot \lambda^2 \cdot C_1 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

З однорідної стосовно невідомих $C_{1,2}$ системи (17) маємо трансцендентне рівняння для знаходження λ :

$$(\bar{c})^2 \cdot \sin(\lambda \cdot h) - a^2 \cdot \lambda \cdot \cos(\lambda \cdot h) = 0, \quad (18)$$

яке визначає власні числа задачі (14) та (15).

Дослідимо рівняння (18). Якщо покласти

$$h \cdot \lambda = \mu; \quad p = \frac{(\bar{c})^2 \cdot h}{a^2} = \frac{a^2 \cdot h}{m \cdot h \cdot a^2} = \frac{1}{m} = \frac{\rho \cdot S \cdot h}{m_M}, \quad (19)$$

тоді рівняння (18) набуде такого вигляду:

$$p \cdot \sin \mu = \mu \cdot \cos \mu \quad (p > 0). \quad (20)$$

Для знаходження дійсних коренів цього рівняння достатньо побудувати графіки функцій:

$$y = \text{tg} \mu; \quad y = \frac{\mu}{p} = \mu \cdot m,$$

а потім визначити абсциси точок перетину цих кривих (рис. 4). З цього рисунка бачимо, що корінь μ_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ рівняння (20) зі збільшенням індексу k необмежено зростає за абсолютною величиною, причому різниця $\mu_k - (2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ прямує до нуля. Звідси випливає, що за доволі високого значення k можна покласти:

$$\mu_k \approx (2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

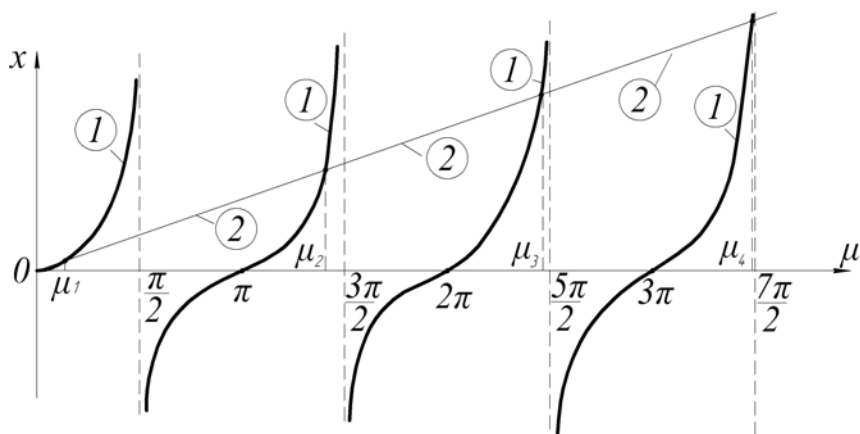


Рис. 4. Графіки функцій $y = \operatorname{tg} \mu - 1$ та $y = \mu \cdot t - 2$ для визначення коренів рівняння (20)

Якщо за умовами задачі число p має малу величину ($m \gg 1$), тоді наближене значення (21) буде давати доволі точний результат і за невеликих значень k . Якщо ж величина p не дуже мала ($m \geq 1$), тоді для обчислення коренів $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ можна застосувати метод ітерацій.

Рівняння (20) не може мати суто уявних коренів. Доведемо це твердження методом від зворотного, тобто покладемо $\mu = i \cdot \nu$, $i^2 = -1$, причому ν – дійсне число. Тоді матимемо:

$$i \cdot \nu \cdot \cos(i \cdot \nu) - p \cdot \sin(i \cdot \nu) = 0, \text{ або } p \cdot \operatorname{sh} \nu - \nu \cdot \operatorname{ch} \nu = 0. \text{ Звідси } \operatorname{th} \nu = \frac{\nu}{p} = m \cdot \nu.$$

$m > 1$ і останнє рівняння не має коренів, оскільки графіки функцій $\operatorname{th} \nu$ та $m \cdot \nu$ ($m > 1$) не перетинаються між собою за будь-якого дійсного ν .

Можна показати, що рівняння (20) не може мати й комплексних коренів [4].

Отже, рівняння (20) має тільки дійсні корені, причому вони попарно однакові за абсолютною величиною й обернені за знаком, тому достатньо розглядати тільки додатні корені. Позначимо через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ додатні корені рівняння (20). Тоді згідно з (19) власні числа будуть:

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{\mu_k}{h} \right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Кожному власному числу λ_k відповідає власна функція:

$$Z_k(z) = p \cdot \cos\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) + \mu_k \cdot \sin\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

За $\lambda = \lambda_k$ загальний розв'язок рівняння (13) має такий вигляд:

$$T_k(t) = \tilde{a}_k \cdot \cos\left(\frac{\mu_k \cdot a \cdot t}{h}\right) + \tilde{b}_k \cdot \sin\left(\frac{\mu_k \cdot a \cdot t}{h}\right), \quad (24)$$

де \tilde{a}_k та \tilde{b}_k – довільні сталі. Оскільки існує співвідношення (12), матимемо, що функція

$$u_k(z, t) = \left\{ \tilde{a}_k \cdot \cos\left(\frac{\mu_k \cdot a \cdot t}{h}\right) + \tilde{b}_k \cdot \sin\left(\frac{\mu_k \cdot a \cdot t}{h}\right) \right\} \cdot \left[p \cdot \cos\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) + \mu_k \cdot \sin\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

задовольняє рівняння (7) й граничні умови (10) за будь-яких значень \tilde{a}_k та \tilde{b}_k . Далі складемо ряд:

$$u(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \tilde{a}_k \cdot \cos\left(\frac{\mu_k \cdot a \cdot t}{h}\right) + \tilde{b}_k \cdot \sin\left(\frac{\mu_k \cdot a \cdot t}{h}\right) \right\} \cdot \left[p \cdot \cos\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) + \mu_k \cdot \sin\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) \right]. \quad (26)$$

Для виконання початкових умов (11) необхідно, щоб

$$u(z,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cdot \left[p \cdot \cos\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) + \mu_k \cdot \sin\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) \right] = 0, \quad \text{при } 0 \leq z \leq h; \quad (27)$$

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial t} = +\dot{z}(0) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \cdot \frac{\mu_k \cdot a}{h} \cdot \frac{\mu_k^2}{h} = +\dot{z}(0). \quad (28)$$

З (27) випливає, що $\tilde{a}_k = 0$, а для визначення \tilde{b}_k маємо з (28), враховуючи (5), таке:

$$\tilde{b}_k = \frac{h^2 \cdot A \cdot b_k}{\mu_k^3 \cdot a \cdot \pi} \cdot k \cdot \Omega, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

Остаточно для $u(z,t)$ отримаємо такий вираз:

$$u(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \cdot \sin\left(\frac{\mu_k \cdot a \cdot t}{h}\right) \cdot \left[p \cdot \cos\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) + \mu_k \cdot \sin\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) \right]. \quad (30)$$

Якщо врахувати (29), тоді (30) можна подати так:

$$u(z,t) = \frac{h^2 \cdot A \cdot \Omega}{a \cdot \pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \frac{k}{\mu_k^3} \sin\left(\frac{\mu_k \cdot a \cdot t}{h}\right) \cdot \left[p \cdot \cos\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) + \mu_k \cdot \sin\left(\frac{\mu_k \cdot z}{h}\right) \right]. \quad (31)$$

Приєднана маса суміші $m_{np}(t)$ визначається так:

$$m_{np}(t) = \int_0^h \frac{E \cdot S \cdot \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}}{\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}} dz = E \cdot S \cdot \int_0^h \left[\frac{\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}}{\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}} \right] dz. \quad (32)$$

Якщо T – період зміни жорсткості вібросистеми, тоді у подальшому під час розгляду її руху як системи із зосередженими параметрами (системи дискретного типу) інерційні властивості суміші враховуємо за формулою

$$\bar{m}_{np} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T m_{np}(t) dt. \quad (33)$$

Коефіцієнт опору, який визначає рівень енергії, що розсіюється у суміші (у межах моделі її як системи дискретного типу), знаходимо зі співвідношення:

$$\bar{b} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \int_0^h \frac{E \cdot S \cdot \gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial u}{\partial t}} dz \cdot dt, \quad (34)$$

де γ – коефіцієнт, що характеризує розсіювання у матеріалі суміші енергії коливань.

У прийнятій розрахунковій схемі вібросистеми як системи із зосередженими параметрами під M розуміється приведена маса вібросистеми, що містить масу машини m_M , що коливається, масу суміші m_{np} , тобто ($M = m_M + m_{np}$). Часові проміжки τ_1 і τ_2 показують час руху маси без контакту з пружними обмежувачами коливання, жорсткістю c і в контакті з цими елементами (рис. 3).

Рівняння коливань вказаної системи дискретного типу, яке досліджуватимемо у подальшому, має вигляд:

$$M \cdot \ddot{x} + [C_0 + C_1 \cdot f(t)] \cdot x + (b_0 + \bar{b}) \cdot \dot{x} = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \tilde{\varphi}_0), \quad (35)$$

де b_0 – коефіцієнт опору, що визначає рівень розсіювання енергії у матеріалі самої вібромашини (тертя вважаємо в'язким за І. Ньютоном). Функція $f(t)$ має такий вигляд:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \tau_1; \\ 1, & \tau_1 < t \leq T; \end{cases} \quad \tau_1 + \tau_2 = T \Rightarrow \tau_2 = T - \tau_1. \quad (36)$$

Функцію $f(t)$ (36) можна подати у компактнішому вигляді:

$$f(t) = \sigma(t - \tau_1) - \sigma(t - T), \quad (37)$$

де $\sigma(y)$ – функція Хевісайда аргументу y .

Подано рівняння (35) у вигляді приведенного до стандартного вигляду [3]:

$$\ddot{x} + k_0^2 \cdot (1 \pm \mu) \cdot x + 2 \cdot \tilde{h} \cdot \dot{x} = \frac{F_0}{M} \cdot \sin(\omega \cdot t + \tilde{\varphi}_0), \quad (38)$$

де $2 \cdot \tilde{h} = \frac{(b_0 + \bar{b})}{M}$, $k_0^2 = \frac{(C_0 + C_1/2)}{M}$, $\mu = \frac{C_1}{2 \cdot (C_0 + C_1/2)}$. Верхній знак другий член рівняння (38)

має у проміжок часу $\tau_1 < t \leq T$, а нижній – у проміжок часу $0 \leq t \leq \tau_1$ (на кожному періоді зміни жорсткості вібросистеми T).

А. Розглянемо коливання вібросистеми за умови: $F_0 \equiv 0$, $\tilde{h} = 0$ (відсутнє тертя, власні коливання). При цьому використаємо спосіб припасовування для знаходження розв'язків рівняння:

$$\ddot{x} + k_0^2 \cdot (1 \pm \mu) \cdot x = 0. \quad (39)$$

Диференціальне рівняння (39) має сталі коефіцієнти на проміжках часу: $0 \leq t \leq \tau_1$ та $\tau_1 < t \leq T$, а саме:

$$\text{а) } \quad 0 \leq t \leq \tau_1 \quad \ddot{x}_1 + k_0^2 \cdot (1 - \mu) \cdot x_1 = 0; \quad (40)$$

$$\text{б) } \quad \tau_1 < t \leq T \quad \ddot{x}_2 + k_0^2 \cdot (1 + \mu) \cdot x_2 = 0. \quad (41)$$

Диференціальні рівняння (40) та (41) зі сталими коефіцієнтами мають такі розв'язки:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{C}_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t) + \tilde{C}_2 \cdot \cos(k_2 \cdot t); \\ x_2 &= \tilde{D}_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t) + \tilde{D}_2 \cdot \cos(k_2 \cdot t), \end{aligned} \quad (42)$$

де $k_1 = k_0 \cdot \sqrt{1 - \mu}$, $k_2 = k_0 \cdot \sqrt{1 + \mu}$. У цих розв'язках присутні чотири сталі \tilde{C}_1 , \tilde{C}_2 , \tilde{D}_1 та \tilde{D}_2 , для визначення яких необхідні чотири умови. Дві умови належать до моменту часу $t = \tau_1$. У вказаний момент повинно бути:

$$x_1(\tau_1) = x_2(\tau_1); \quad \dot{x}_1(\tau_1) = \dot{x}_2(\tau_1). \quad (43)$$

Це дає такі співвідношення:

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_1) + \tilde{C}_2 \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_1) = \tilde{D}_1 \cdot \sin(k_2 \cdot \tau_1) + \tilde{D}_2 \cdot \cos(k_2 \cdot \tau_1); \\ k_1 \cdot (\tilde{C}_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_1) - \tilde{C}_2 \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_1)) = k_2 \cdot (\tilde{D}_1 \cdot \cos(k_2 \cdot \tau_1) - \tilde{D}_2 \cdot \sin(k_2 \cdot \tau_1)). \end{cases} \quad (44)$$

Запишемо ще два співвідношення:

$$\lambda \cdot x_1(0) = x_2(T); \quad \lambda \cdot \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(T), \quad (45)$$

у яких λ – деяке, поки що невідоме число.

Співвідношеннями (45) стверджується, що після закінчення розглядуваного періоду коливань $T = \tau_1 + \tau_2$ узагальнена координата й узагальнена швидкість змінюються у λ разів. Відповідно до

цього руху вібросистеми у наступному періоді рух почнеться за змінених у λ разів початкових умов, тобто буде повторювати рух у розглядуваному періоді, але у зміненому у λ разів масштабі.

Якщо $|\lambda| > 1$, тоді коливання у кожному наступному періоді будуть підсилюватись, а якщо $|\lambda| < 1$, тоді вони будуть поступово затухати. Отже, стійкість чи нестійкість вібросистеми визначається значенням модуля λ .

Підставляючи розв'язки (42) у співвідношення (45), матимемо:

$$\begin{cases} \lambda \cdot \tilde{C}_2 = \tilde{D}_1 \cdot \sin(k_2 \cdot T) + \tilde{D}_2 \cdot \cos(k_2 \cdot T) ; \\ \lambda \cdot \tilde{C}_1 \cdot k_1 = \tilde{D}_1 \cdot k_2 \cdot \cos(k_2 \cdot T) - \tilde{D}_2 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot T) . \end{cases} \quad (46)$$

Система рівнянь (44) та (46) однорідна стосовно сталих $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ і має відмінні від нуля розв'язки лише у тому випадку, якщо дорівнює нулю визначник, складений з її коефіцієнтів:

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} \sin(k_1 \cdot \tau_1) ; & \cos(k_1 \cdot \tau_1) ; & -\sin(k_2 \cdot \tau_1) ; & -\cos(k_2 \cdot \tau_1) ; \\ k_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_1) ; & -k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_1) ; & -k_2 \cdot \cos(k_2 \cdot \tau_1) ; & k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot \tau_1) ; \\ 0 ; & \lambda ; & -\sin(k_2 \cdot T) ; & -\cos(k_2 \cdot T) ; \\ k_1 \cdot \lambda ; & 0 ; & -k_2 \cdot \cos(k_2 \cdot T) ; & k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot T) ; \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

Позначаючи елемент Det (47) a_{ij} , $(i, j) = \overline{1,4}$ і розгортаючи визначник, отримаємо таке квадратне рівняння:

$$\tilde{A} \cdot \lambda^2 + \tilde{B} \cdot \lambda + \tilde{C} = 0 = 0, \quad (48)$$

у якому для спрощення записів позначимо:

$$\begin{aligned} a_{31} = a_{42} = 0; \quad a_{32} = \lambda; \quad a_{41} = k_1 \cdot \lambda; \quad \tilde{A} &= k_1 \cdot (-a_{13} \cdot a_{24} + a_{23} \cdot a_{14}); \\ \tilde{B} &= k_1 \cdot a_{33} \cdot (a_{12} \cdot a_{24} - a_{22} \cdot a_{14}) - k_1 \cdot a_{34} \cdot (a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}) + \\ &+ a_{43} \cdot (a_{11} \cdot a_{24} - a_{21} \cdot a_{14}) - a_{44} \cdot (a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13}); \\ \tilde{C} &= a_{44} \cdot a_{33} \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) + a_{43} \cdot a_{34} \cdot (a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22}). \end{aligned}$$

Корені рівняння (48) такі:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\tilde{B} - \sqrt{(\tilde{B})^2 - 4 \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{C}}}{2 \cdot \tilde{A}}; \quad \lambda_2 = \frac{-\tilde{B} + \sqrt{(\tilde{B})^2 - 4 \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{C}}}{2 \cdot \tilde{A}}; \\ \tilde{A} &= k_1 \cdot k_2 > 0; \quad \tilde{C} = k_1 \cdot k_2 > 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Для того, щоб числа λ_1 та λ_2 були дійсними, як це й передбачено змістом розв'язуваної задачі, повинно бути:

$$\left(\tilde{B} \right)^2 - 4 \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{C} > 0, \quad (50)$$

де $\tilde{B} = (k_1^2 + k_2^2) \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_1) \cdot \sin(k_2 \cdot \tau_2) - 2 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_1) \cdot \cos(k_2 \cdot \tau_2)$.

Нерівність (50) можна подати у розгорнутому вигляді так:

$$\left[(k_1^2 + k_2^2) \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_1) \cdot \sin(k_2 \cdot \tau_2) - 2 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_1) \cdot \cos(k_2 \cdot \tau_2) \right]^2 - 4 \cdot k_1^2 \cdot k_2^2 > 0, \quad (51)$$

або

$$\left| \tilde{B} \right| > 2 \cdot \tilde{A} \Rightarrow \left| (k_1^2 + k_2^2) \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_1) \cdot \sin(k_2 \cdot \tau_2) - 2 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_1) \cdot \cos(k_2 \cdot \tau_2) \right| > 2 \cdot k_1 \cdot k_2. \quad (52)$$

Якщо реалізується нерівність (52), тоді один з коренів $\lambda_{1,2}$ або його модуль ($|\lambda_{1,2}|$) більший від одиниці, а саме:

$$\text{а) } \tilde{B} > 0, \quad \text{тоді } |\lambda_1| > 1;$$

$$\text{б) } \tilde{B} < 0, \quad \text{тоді } \lambda_2 > 1.$$

Звідси випливає, що під час виконання умови/нерівності (52) коливання вібросистеми будуть з кожним новим періодом збільшуватись. Нерівність (52) являє собою не тільки умову дійсних значень множника λ , але й одночасно умову виникнення у вібросистемі параметричного резонансу.

Оскільки значення \tilde{B} і \tilde{A} залежать від $k_{1,2}$, а значить від (k_0, μ) , і \tilde{B} ще залежить від $\tau_{1,2}$ та $T = \tau_1 + \tau_2$, то значення цих констант $(k_0, \mu, \tau_1, \tau_2)$ повністю визначають стійкість цієї вібросистеми.

Можна нерівність (52) подати у компактнішому вигляді:

$$\left| \cos(k_1 \cdot \tau_1) \cdot \cos(k_2 \cdot \tau_2) - \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{2 \cdot k_1 \cdot k_2} \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_1) \cdot \sin(k_2 \cdot \tau_2) \right| > 1. \quad (53)$$

За $\tau_1 = \tau_2 = T/2$ (53) збігається з умовою збудження у вібросистемі параметричного резонансу, яка наведена у [1, 3]. Якщо ввести позначення $\alpha = \frac{k_0 \cdot T}{2 \cdot \pi}$, тоді за $\tau_1 = \tau_2 = T/2$ (53) набуває вигляду

$$\left| \cos(\pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{1 + \mu}) \cdot \cos(\pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{1 - \mu}) - \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} \cdot \sin(\pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{1 + \mu}) \cdot \sin(\pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{1 - \mu}) \right| > 1, \quad (54)$$

де α є відношенням середнього значення k_0 власної частоти вібросистеми до частоти пульсації параметра (жорсткості).

На рис. 5 показано побудовану за допомогою умови (54) діаграму стійкості, впродовж осей якої відкладені значення $4 \cdot \alpha^2$ та $2 \cdot \mu \cdot \alpha^2$. У незаштригованих областях значення параметрів α та μ такі, що умова (54) виконується, тобто вібросистема нестійка. Заштриговані області діаграми відповідають стійким станам системи. За допомогою такої діаграми можна одразу розмірковувати про стійкість за цими значеннями α та μ без усіляких додаткових обчислень.

Насамперед звертаємо увагу на ті зони областей нестійкості, які розміщені поблизу горизонтальної осі, тобто відповідають малим значенням параметра μ . Як бачимо, у цих зонах $4 \cdot \alpha^2 \approx n^2$, тобто

$$\alpha \approx \frac{n}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (55)$$

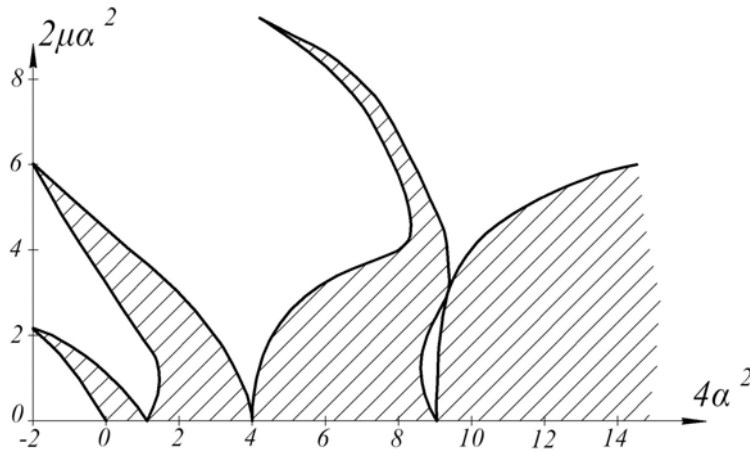


Рис. 5. Діаграма стійкості вібростеми (за умови: $\tau_1 = \tau_2 = T/2$)

Те саме можна знайти з таких міркувань:

$$\begin{cases} \cos(\pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{1 + \mu}) \cdot \cos(\pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{1 - \mu}) - \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} \cdot \sin(\pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{1 + \mu}) \cdot \sin(\pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{1 - \mu}) = A^* ; \\ A^*|_{\mu=0} = \cos^2(\pi \cdot \alpha) - \sin^2(\pi \cdot \alpha) = \cos(2 \cdot \pi \cdot \alpha) , \end{cases} \quad (56)$$

тобто за довільних значень α маємо $|A^*| \leq 1$. Рівність $|A^*| = 1$, яка відповідає виникненню параметричного резонансу вібростеми, можлива за умови, якщо аргумент $2 \cdot \pi \cdot \alpha$ задовольняє рівності:

$$2 \cdot \pi \cdot \alpha = \pi \cdot n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (57)$$

з якої також випливає співвідношення (55).

Отже, якщо виконується умова (55), тоді параметричний резонанс виникає за будь-якої малої глибини пульсації ($\mu \rightarrow 0$). При цьому основне значення має випадок $n = 1$, коли $\alpha = 1/2$, тобто коли середнє значення власної частоти вдвічі менше від частоти параметричного збудження.

За значної глибини пульсації й суттєвої відмінності μ від 0 параметричний резонанс вібростеми виникає у цілих областях значень α , розміщених поблизу значень (55); чим більше задане значення μ , тим ширші ці області. З цієї причини відлаштуватись від параметричного резонансу важче, ніж від звичайного резонансу; параметричний резонанс небезпечніший, ніж звичайний (якщо, звісно, за функціонування вібростеми його намагаються уникнути), ще й з тієї причини, що лінійне демпфування (яке вище взагалі не враховувалось) лише дещо звужує області нестійкості, але нездатне обмежити зростання амплітуд коливань у цих областях (хоча за дії нелінійно-в'язких сил тертя амплітуди коливань виявляються обмеженими).

Якщо ввести позначення

$$\bar{a} = \frac{k_0^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}; \quad \bar{q} = \frac{k_0^2 \cdot T^2 \cdot \mu}{4 \cdot \pi^2}, \quad (58)$$

а також заміну змінної $t \Rightarrow \tau = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t$, тоді рівняння (40) та (41) можна звести до одного рівняння

Мейснера [5]:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \{\bar{a} + \bar{q} \cdot \chi(\tau)\} \cdot x = 0; \quad x \in R, \quad (59)$$

де \bar{a} , \bar{q} – невід’ємні параметри, які задаються співвідношеннями (58), а $\chi(\tau) - 2 \cdot \pi$ – періодична кусково-лінійна функція:

$$\chi(t) = \begin{cases} -1, & 0 < \tau \leq \pi; \\ 1, & \pi < \tau \leq 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \chi(\tau + 2 \cdot \pi) = \chi(\tau). \quad (60)$$

Введемо позначення

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\bar{a} + \bar{q}}; \quad \tilde{\omega}_2 = \sqrt{|\bar{a} - \bar{q}|}. \quad (61)$$

Якщо $\bar{a} > \bar{q}$, тоді межа/границя між областями стабільності та нестабільності у просторі (\bar{a}, \bar{q}) задається співвідношенням

$$\left| 2 \cdot \cos(\pi \cdot \tilde{\omega}_1) \cdot \cos(\pi \cdot \tilde{\omega}_2) - \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} + \frac{\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1} \right) \cdot \sin(\pi \cdot \tilde{\omega}_1) \cdot \sin(\pi \cdot \tilde{\omega}_2) \right| = 2; \quad (62)$$

для випадку $\bar{a} < \bar{q}$:

$$\left| 2 \cdot \cos(\pi \cdot \tilde{\omega}_1) \cdot \operatorname{ch}(\pi \cdot \tilde{\omega}_2) - \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} - \frac{\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1} \right) \cdot \sin(\pi \cdot \tilde{\omega}_1) \cdot \operatorname{sh}(\pi \cdot \tilde{\omega}_2) \right| = 2; \quad (63)$$

для випадку $\bar{a} = \bar{q}$:

$$|2 \cdot \cos(\pi \cdot \tilde{\omega}_1) - \pi \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot \sin(\pi \cdot \tilde{\omega}_1)| = 2. \quad (64)$$

Діаграму стійкості режимів коливань вібростеми у просторі (\bar{a}, \bar{q}) показано на рис. 6, де зони нестійкості заштриховані.

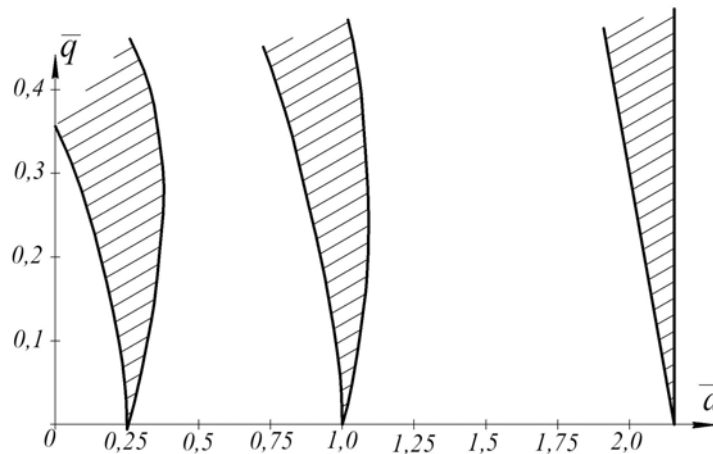


Рис. 6. Діаграма стійкості режимів руху/коливань вібростеми (за рівнянням Мейснера)

Б. Розглянемо коливання вібростеми за умови: $F_0 \equiv 0$, $\tilde{h} \neq 0$ (власні коливання, наявне в’язке тертя).

За наявності в’язкого тертя замість рівнянь (40) та (41) матимемо:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \tilde{h} \cdot \dot{x} + k_0^2 \cdot (1 \pm \mu) \cdot x = 0. \quad (65)$$

Розмірковуючи, як і у пункті А, запишемо розв’язок для двох проміжків часу [3]:

$$\begin{cases} x_1 = C_1^* \cdot e^{-\tilde{h} \cdot t} \cdot \sin(k_1^* \cdot t) + D_1^* \cdot e^{-\tilde{h} \cdot t} \cdot \cos(k_1^* \cdot t), & 0 \leq t \leq \tau_1; \\ x_2 = C_2^* \cdot e^{-\tilde{h} \cdot t} \cdot \sin(k_2^* \cdot t) + D_2^* \cdot e^{-\tilde{h} \cdot t} \cdot \cos(k_2^* \cdot t), & \tau_1 < t \leq T = \tau_1 + \tau_2, \end{cases} \quad (66)$$

де

$$k_1^* = \sqrt{k_1^2 - \tilde{h}^2} = \sqrt{(1 - \mu)k_0^2 - \tilde{h}^2}; \quad k_2^* = \sqrt{k_2^2 - \tilde{h}^2} = \sqrt{(1 + \mu)k_0^2 - \tilde{h}^2}. \quad (67)$$

Умови у момент $t = \tau_1$ мають вигляд:

$$x_1(\tau_1) = x_2(\tau_1); \quad \dot{x}_1(\tau_1) = \dot{x}_2(\tau_1), \quad (68)$$

або

$$\begin{cases} C_1^* \cdot \sin(k_1^* \cdot \tau_1) + D_1^* \cdot \cos(k_1^* \cdot \tau_1) = C_2^* \cdot \sin(k_2^* \cdot \tau_1) + D_2^* \cdot \cos(k_2^* \cdot \tau_1); \\ C_1^* \cdot (-\tilde{h} \cdot \sin\{k_1^* \cdot \tau_1\} + k_1^* \cdot \cos\{k_1^* \cdot \tau_1\}) - D_1^* \cdot (\tilde{h} \cdot \cos\{k_2^* \cdot \tau_1\} + k_1^* \cdot \sin\{k_1^* \cdot \tau_1\}) = \\ = C_2^* \cdot (-\tilde{h} \cdot \sin\{k_2^* \cdot \tau_1\} + k_2^* \cdot \cos\{k_2^* \cdot \tau_1\}) - D_2^* \cdot (\tilde{h} \cdot \cos\{k_2^* \cdot \tau_1\} + k_2^* \cdot \sin\{k_2^* \cdot \tau_1\}). \end{cases} \quad (69)$$

Далі складаємо дві умови типу (45):

$$\lambda \cdot x_1(0) = x_2(T); \quad \lambda \cdot \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(T), \quad (70)$$

тобто

$$\begin{cases} \lambda \cdot D_1^* = e^{-\tilde{h} \cdot T} \cdot (C_2^* \cdot \sin\{k_2^* \cdot T\} + D_2^* \cdot \cos\{k_2^* \cdot T\}), \\ \lambda \cdot (C_1^* \cdot k_1^* - D_1^* \cdot \tilde{h}) = e^{-\tilde{h} \cdot T} \times \\ \times [C_2^* (-\tilde{h} \cdot \sin\{k_2^* \cdot T\} + k_2^* \cdot \cos\{k_2^* \cdot T\}) - D_2^* (\tilde{h} \cdot \cos\{k_2^* \cdot T\} + k_2^* \cdot \sin\{k_2^* \cdot T\})]. \end{cases} \quad (71)$$

Чотири рівняння (69) та (71) утворюють систему, однорідну стосовно сталих C_1^* , D_1^* , C_2^* та D_2^* ; відмінні від нуля розв'язки відповідають випадку, коли дорівнює нулю визначник, складений з коефіцієнтів системи, розгорнувши який, приходимо аналогічно (48) до квадратного рівняння:

$$A^* \cdot \lambda^2 + B^* \cdot \lambda + C^* = 0, \quad (72)$$

у якому задля спрощення записів введені позначення:

$$\begin{aligned} a_{11}^* &= \sin(k_1^* \cdot \tau_1); & a_{12}^* &= \cos(k_1^* \cdot \tau_1); & a_{13}^* &= -\sin(k_2^* \cdot \tau_1); & a_{14}^* &= -\cos(k_2^* \cdot \tau_1); \\ a_{21}^* &= [-\tilde{h} \cdot \sin(k_1^* \cdot \tau_1) + k_1^* \cdot \cos(k_1^* \cdot \tau_1)]; & a_{22}^* &= [-\tilde{h} \cdot \cos(k_2^* \cdot \tau_1) + k_1^* \cdot \sin(k_1^* \cdot \tau_1)]; \\ a_{23}^* &= \tilde{h} \cdot \sin(k_2^* \cdot \tau_1) - k_2^* \cdot \cos(k_2^* \cdot \tau_1); & a_{24}^* &= \tilde{h} \cdot \cos(k_2^* \cdot \tau_1) + k_2^* \cdot \sin(k_2^* \cdot \tau_1); \\ a_{31}^* &= 0; & a_{32}^* &= \lambda; & a_{33}^* &= -e^{-\tilde{h} \cdot T} \cdot \sin(k_2^* \cdot T); & a_{34}^* &= -e^{-\tilde{h} \cdot T} \cdot \cos(k_2^* \cdot T); \\ a_{41}^* &= k_1^* \cdot \lambda; & a_{42}^* &= -\lambda \cdot \tilde{h}; & a_{43}^* &= e^{-\tilde{h} \cdot T} \cdot [\tilde{h} \cdot \sin(k_2^* \cdot T) - k_2^* \cdot \cos(k_2^* \cdot T)]; \\ a_{44}^* &= e^{-\tilde{h} \cdot T} \cdot [\tilde{h} \cdot \cos(k_2^* \cdot T) + k_2^* \cdot \sin(k_2^* \cdot T)]; & A^* &= k_1^* \cdot (-a_{13}^* \cdot a_{24}^* + a_{23}^* \cdot a_{14}^*); \\ B^* &= k_1^* \cdot a_{33}^* \cdot (a_{12}^* \cdot a_{24}^* - a_{22}^* \cdot a_{14}^*) - k_1^* \cdot a_{34}^* \cdot (a_{12}^* \cdot a_{23}^* - a_{22}^* \cdot a_{13}^*) + a_{43}^* \cdot (a_{11}^* \cdot a_{24}^* - a_{21}^* \cdot a_{14}^*) - \\ &- a_{44}^* \cdot (a_{11}^* \cdot a_{23}^* - a_{21}^* \cdot a_{13}^*) - \tilde{h} \cdot [(-a_{33}^*) \cdot (a_{11}^* \cdot a_{24}^* - a_{21}^* \cdot a_{14}^*) + a_{34}^* \cdot (a_{11}^* \cdot a_{23}^* - a_{21}^* \cdot a_{13}^*)]; \\ C^* &= a_{44}^* \cdot a_{33}^* \cdot (a_{11}^* \cdot a_{22}^* - a_{21}^* \cdot a_{12}^*) + a_{43}^* \cdot a_{34}^* \cdot (a_{21}^* \cdot a_{12}^* - a_{11}^* \cdot a_{22}^*). \end{aligned} \quad (73)$$

Корені рівняння (72) такі:

$$\lambda_1 = \frac{-B^* - \sqrt{(B^*)^2 - 4 \cdot A^* \cdot C^*}}{2 \cdot A^*}; \quad \lambda_2 = \frac{-B^* + \sqrt{(B^*)^2 - 4 \cdot A^* \cdot C^*}}{2 \cdot A^*}. \quad (74)$$

Для того, щоб числа λ_1 і λ_2 були дійсними, необхідно

$$(B^*)^2 - 4 \cdot A^* \cdot C^* > 0. \quad (75)$$

Зрозуміло, що $A^* \neq 0$.

У кожному конкретному випадку за заданими значеннями k_0 , μ , \tilde{h} , T , τ_1 і τ_2 можна обчислити A^* , B^* і C^* , а вже потім визначити корені $\lambda_{1,2}$ (74). Ознакою нестійкості слугує дійсність коренів $\lambda_{1,2}$ та нерівність $|\lambda| > 1$ для найбільшого за модулем кореня.

Введемо позначення:

$$-\frac{B^*}{2 \cdot A^*} = A_1^*; \quad \frac{C^*}{A^*} = B_1^*. \quad (76)$$

Тоді для виконання умови: $\lambda_{1,2}$ (74) – дійсні числа, – необхідно виконати таку нерівність:

$$|A_1^*| > \sqrt{B_1^*}, \quad (77)$$

яка є жорсткішою умовою, ніж умова (53), отримана вище для випадку відсутності в'язкого тертя. Зокрема, за $\tilde{h} > 0$ і $\mu \rightarrow 0$ умова (77) (у тому числі й для варіанта $\tau_1 = \tau_2 = T/2$) не виконується, тобто параметричний резонанс у вібростемі (який спричинений періодичною зміною у часі її жорсткості) неможливий. Це означає, що для виникнення параметричного резонансу необхідна деяка, доволі значна глибина пульсації (жорсткості вібростеми) μ . Загалом в'язке тертя справляє стабілізуючий вплив й призводить до деякого звуження областей нестійкості цієї вібростеми.

В. Розглянемо коливання вібростеми за умови: $F_0 \equiv 0$, $\tilde{h} = 0$, – а її жорсткість змінюється за законом косинуса, тобто

$$C_{\text{вібростеми}} = C_0 + C_1 \cdot \cos\left\{\frac{\pi \cdot t}{2 \cdot \tau_2}\right\}. \quad (78)$$

Тоді рівняння (35) набуває вигляду

$$M \cdot \ddot{x} + \left[C_0 + C_1 \cdot \cos\left\{\frac{\pi \cdot t}{2 \cdot \tau_2}\right\} \right] \cdot x = 0. \quad (79)$$

Введемо безрозмірний час $\theta = \frac{\pi \cdot t}{2 \cdot \tau_2 \cdot 2} = \frac{\pi \cdot t}{4 \cdot \tau_2}$, тоді (79) перетворюється на

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + (\varepsilon + 2 \cdot q^* \cdot \cos 2 \cdot \theta) \cdot x = 0, \quad (80)$$

що за структурою є рівнянням Мат'є, а коефіцієнти знаходять зі співвідношень

$$\varepsilon = \frac{16 \cdot C_0 \cdot \tau_2^2}{M \cdot \pi^2}; \quad q^* = \frac{8 \cdot C_1 \cdot \tau_2^2}{M \cdot \pi^2}. \quad (81)$$

Фізичний зміст $\varepsilon/4$ полягає у тому, що цей коефіцієнт характеризує відношення квадрата власної частоти системи $\left(C_0/M\right)$ до квадрата частоти зміни параметра жорсткості $\left(\frac{\pi^2}{4 \cdot \tau_2^2}\right)$.

Коефіцієнт $q^*/2$ характеризує ступінь зміни параметра жорсткості вібростеми (ступінь її

модуляції) і є відношенням квадрата частоти $\left(\frac{C_1}{M}\right)$ до квадрата частоти зміни параметра жорсткості $\left(\frac{\pi^2}{4 \cdot \tau_2^2}\right)$.

Розв'язками рівняння (80) слугують спеціальні функції Мат'є, властивості яких детально вивчені. Ці розв'язки можуть бути або обмеженими, або необмежено зростаючими. Виділення відповідних до цих випадків областей параметрів (ε, q^*) призводить до діаграми стійкості, яка наведена у готовому вигляді на рис. 7 (діаграма Айнса–Стретта). Вона схожа на діаграму стійкості, зображену на рис. 5. Границями між областями стійкості й нестійкості відповідають періодичні рухи. Діаграма стійкості симетрична щодо осі ε , оскільки знак q^* у рівнянні (80) не має значення.

Якщо диференціальне рівняння задачі зведене до форми (80), тоді за цими значеннями ε, q^* за допомогою діаграми стійкості можна одразу зробити висновок про стійкість чи нестійкість вібростеми. Йдеться або про стійкість деякого основного руху/коливання (у цьому випадку під x слід розуміти варіацію відповідної координати руху), або про стійкість стану рівноваги (тоді x – відхилення від стану рівноваги).

Для наближеного визначення границь між областями стійкості і нестійкості у площині параметрів (q^*, ε) може бути застосований спосіб гармонічного балансу [3], або підходи робіт [5, 14, 15]. На границях першої області нестійкості рух повинен бути періодичним, причому період, як зазначено у попередніх пунктах (А, Б), вдвічі більший від періоду зміни параметра. Але період зміни параметра у рівнянні (80) дорівнює π , тому вказаний рух має період 2π і його можна подати у вигляді ряду:

$$x = \overline{A}_1 \cdot \sin \theta + \overline{B}_1 \cdot \cos \theta + \overline{A}_3 \cdot \sin 3 \cdot \theta + \overline{B}_3 \cdot \cos 3 \cdot \theta + \dots \tag{82}$$

Обмежуючись першими двома членами, підставляємо їх суму у рівняння (80); прирівнюючи до нуля коефіцієнти за $\sin \theta$ та $\cos \theta$, отримуємо два однорідні рівняння

$$(\varepsilon + q^* - 1) \cdot \overline{A}_1 = 0; \quad (\varepsilon - q^* - 1) \cdot \overline{B}_1 = 0, \tag{83}$$

з яких випливають рівняння обох границь:

$$\varepsilon^{np} = 1 + q^*; \quad \varepsilon^{liv} = 1 - q^*. \tag{84}$$

Ці рівняння можна уточнювати, беручи до уваги більшу кількість членів ряду (82).

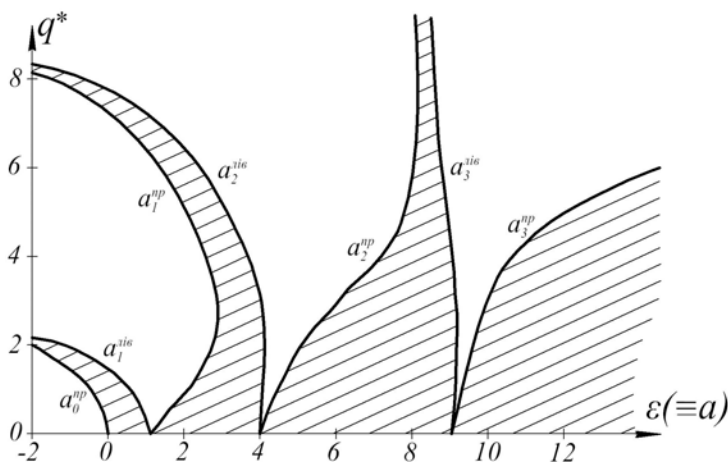


Рис. 7. Діаграма Айнса–Стретта для рівняння (80) (Мат'є): $a_i^{np} \equiv \varepsilon_i^{np}$, $a_i^{liv} \equiv \varepsilon_i^{liv}$

Згідно з [3] точнішими є рівняння для перших чотирьох областей нестійкості, позначаючи значення $a \equiv \varepsilon$ на границях n -ї області нестійкості через a_n^{lie} та a_n^{np} , мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0^{np} \equiv \varepsilon_0^{np} = -\frac{1}{2} \cdot (q^*)^2 + \frac{7}{128} \cdot (q^*)^4 - \dots ; \\ a_1^{np} \equiv \varepsilon_1^{np} = 1 + q^* - \frac{1}{8} \cdot (q^*)^2 - \frac{1}{64} \cdot (q^*)^3 - \frac{1}{1536} \cdot (q^*)^4 + \dots ; \\ a_1^{lie} \equiv \varepsilon_1^{lie} = 1 - q^* - \frac{1}{8} \cdot (q^*)^2 + \frac{1}{64} \cdot (q^*)^3 - \frac{1}{1536} \cdot (q^*)^4 + \dots ; \\ a_2^{np} \equiv \varepsilon_2^{np} = 4 + \frac{5}{12} \cdot (q^*)^2 - \frac{763}{13824} \cdot (q^*)^4 + \dots ; \\ a_2^{lie} \equiv \varepsilon_2^{lie} = 4 - \frac{1}{12} \cdot (q^*)^2 + \frac{5}{13824} \cdot (q^*)^4 - \dots ; \\ a_3^{np} \equiv \varepsilon_3^{np} = 9 + \frac{1}{16} \cdot (q^*)^2 + \frac{1}{64} \cdot (q^*)^3 + \frac{13}{20480} \cdot (q^*)^4 + \dots ; \\ a_3^{lie} \equiv \varepsilon_3^{lie} = 9 + \frac{1}{16} \cdot (q^*)^2 - \frac{1}{64} \cdot (q^*)^3 + \frac{13}{20480} \cdot (q^*)^4 - \dots . \end{array} \right. \quad (85)$$

Аналіз стабільності рівняння Мат'є проведено у межах підходу робіт [5, 14, 15]. Для цього вихідне рівняння (79) подамо у вигляді:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + [\tilde{a} + \tilde{q} \cdot \cos \tau] \cdot x = 0, \quad x \in R; \quad \tau = \frac{\pi \cdot t}{2 \cdot \tau_2}; \quad \tilde{a} = \frac{4 \cdot C_0 \cdot \tau_2^2}{M \cdot \pi^2}; \quad \tilde{q} = \frac{4 \cdot C_1 \cdot \tau_2^2}{M \cdot \pi^2}. \quad (86)$$

Резонанси (резонансні точки) для рівняння (86) визначаються співвідношенням

$$\tilde{a} = \frac{k^2}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (87)$$

Вважаючи \tilde{q} та \tilde{a} малими величинами ($\tilde{q}; \tilde{a} \leq 1$), введемо величину

$$\Delta \tilde{a} = \tilde{a} - \frac{k^2}{4}, \quad (88)$$

яка символізує відстань конкретного значення \tilde{a} до резонансного. Знайдемо границі між областями стабільності/стійкості й нестабільності/нестійкості у просторі параметрів ($\Delta \tilde{a}; \tilde{q}$) для можливих рухів вібросистеми, які описуються рівнянням (86).

Три перші резонанси відповідають таким співвідношенням:

$$\tilde{a} = 0; \quad \tilde{a} = \frac{1}{4}; \quad \tilde{a} = 1. \quad (89)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \cos(2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\tilde{a}}); \quad f_{12} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}}} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\tilde{a}}); \\ f_{22} &= \cos(2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\tilde{a}}); \quad f_{21} = -\sqrt{\tilde{a}} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\tilde{a}}). \end{aligned} \quad (90)$$

Границі стійкості режимів руху вібросистеми задаються рівнянням

$$\frac{(f_{11} - f_{22})^2}{4} + f_{12} \cdot f_{21} = 0. \quad (91)$$

Вібросистема є стійкою за умови

$$\frac{(f_{11} - f_{22})^2}{4} + f_{12} \cdot f_{21} < 0. \quad (92)$$

Вібросистема є нестійкою у своїх рухах (тобто збуджуються параметричні коливання) за умови:

$$\frac{(f_{11} - f_{22})^2}{4} + f_{12} \cdot f_{21} > 0. \tag{93}$$

Для резонансу $\tilde{a} = 0$ умова нестійкості руху (93) задовольняється до другого порядку малості по \tilde{q} для:

$$\Delta\tilde{a} < -\frac{1}{2} \cdot \tilde{q}^2. \tag{94}$$

Для резонансу $\tilde{a} = \frac{1}{4}$ умова нестійкості руху (93) задовольняється до другого порядку малості по \tilde{q} для:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot \tilde{q} - \frac{1}{8} \cdot \tilde{q}^2 < \Delta\tilde{a} < \frac{1}{2} \cdot \tilde{q} - \frac{1}{8} \cdot \tilde{q}^2, & \text{коли } q > 0 ; \\ \frac{1}{2} \cdot \tilde{q} - \frac{1}{8} \cdot \tilde{q}^2 < \Delta\tilde{a} < -\frac{1}{2} \cdot \tilde{q} - \frac{1}{8} \cdot \tilde{q}^2, & \text{коли } q < 0 . \end{cases} \tag{95}$$

Для резонансу $\tilde{a} = 1$ область нестабільності/нестійкості руху вібросистеми задається співвідношенням:

$$-\frac{1}{12} \cdot \tilde{q}^2 < \Delta\tilde{a} < \frac{5}{12} \cdot \tilde{q}^2. \tag{96}$$

Області нестійкості руху вібросистеми (94), (95) та (96) показані на рис. 8, де наближені границі цих областей показані суцільними (товстими) лініями, а точні границі, обчислені на ПЕОМ, заштриховані. Зазначимо, що третя резонансна область є “тонким язиком” (CUSP), який торкається осі \tilde{a} .

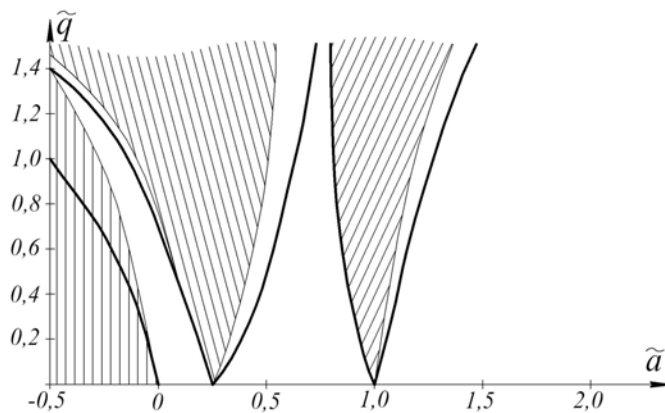


Рис. 8. Області нестійкості режимів коливань для рівняння Мат'є (86) та їх апроксимації

Слід зазначити, що, враховуючи в'язке тертя у рівнянні (80), останнє можна звести до такого:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + (\varepsilon + 2 \cdot q^* \cdot \cos 2 \cdot \theta) \cdot x + 2 \cdot H \cdot \frac{dx}{d\theta} = 0, \tag{97}$$

де $2 \cdot H = \frac{(b_0 + \bar{b}) \cdot 4 \cdot \tau_2}{\pi \cdot M}$. При цьому дещо звужуються границі областей нестійкості (зони виникнення параметричних коливань вібросистеми). Зокрема, замість (84) матимемо:

$$(\varepsilon_1^{np,лів} - 1)^2 = (q^*)^2 - H^2, \tag{98}$$

тоді

$$\varepsilon_1^{np} = 1 + \sqrt{(q^*)^2 - H^2}; \quad \varepsilon_1^{лів} = 1 - \sqrt{(q^*)^2 - H^2}. \tag{99}$$

Висновки: 1. Запропонована адекватна математична модель та проведений всебічно обґрунтований кінематично-силовий аналіз взаємодії робочого органа машини ударно-вібраційного типу, який взаємодіє з оброблюваним середовищем (сумішшю різної фізичної природи та походження). При цьому вказана взаємодія розглянута й досліджена у межах моделі вібростеми як дискретно-континуальної.

2. Вперше обчислені основні параметри, які характеризують вказану взаємодію: приєднана маса суміші, контактна сила, яка діє з боку суміші на робочий орган вібромашини, швидкість, прискорення, переміщення суміші. При цьому врахований континуальний характер взаємодії суміші з робочим органом у межах моделі хвильових процесів, що виникають у ній під час її ущільнення й оброблення.

3. Встановлені умови виникнення у вібростемі параметричних коливань, викликаних зміною у часі жорсткості вібростеми (як за відсутності, так і за наявності в'язких сил тертя/опору суміші).

4. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку основних параметрів та режимів руху/коливань вібраційних (ударно-вібраційних) машин (у межах моделей дискретно-континуального типу) з метою оптимізації їх функціонування як на стадіях проектування/конструювання, так і в умовах реальної експлуатації.

1. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 272 с.
2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. – Л.: Политехника, 1990. – 272 с.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
4. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высш. шк., 1970. – 712 с.
5. Seyranian A.P. Multiparameter Stability Theory With Mechanical Applications. / A.P. Seyranian, A.A. Mailybaev. – Singapore: World Scientific Publ. Co., 2003. – 403 p.
6. Орисенко О.В. Розроблення конструкції ударно-струшувальної установки для формування стінових блоків із легких бетонів на основі аналізу конструктивних особливостей ущільнюючих машин / О.В. Орисенко, М.М. Нестеренко // Зб. наук. пр.: “Галузеве машинобудування, будівництво”. – Полтава: ПолтНТУ, 2009. – Вип. 3 (25). – С. 150–155.
7. Орисенко О.В. Ударно-струшувальна установка для формування стінових арболітових блоків із легких бетонів із застосуванням мінеральних в'язучих / О.В. Орисенко, М.М. Нестеренко, О.О. Шевченко // Зб. наук. пр.: “Галузеве машинобудування, будівництво”. – Полтава: ПолтНТУ, 2009. – Вип. 23. – С. 63–68.
8. Орисенко О.В. Динамічний розрахунок металевої форми для виготовлення арболітових стінових блоків / О.В. Орисенко, М.М. Нестеренко // Зб. наук. пр.: “Галузеве машинобудування, будівництво”. – Полтава: ПолтНТУ, 2010. – Вип. 1 (26). – С. 100–107.
9. Пат. № 33711 Україна. МПК (2006) B28B1/08. Пристрій для ущільнення виробів із бетонних сумішей / Заявники М.П. Нестеренко, О.В. Орисенко, М.М. Нестеренко. – Опубл. 10.07.2008. – Бюл. № 13. – 4 с.
10. Пат. № 33705 Україна. МПК (2006) B28B1/08. Привантажувач для додаткового формування залізобетонних виробів / Заявник М.М. Нестеренко. – Опубл. 10.07.2008. – Бюл. № 13. – 4 с.
11. Пат. № 51631 Україна. МПК (2006) B28B1/08. Форма для виготовлення стінових блоків / Заявники М.М. Нестеренко, М.О. Тобольченко, А.С. Чуваєв, І.В. Федій. – Опубл. 26.07.2010. – Бюл. № 14. – 4 с.
12. Пат. № 34903 Україна. МПК (2006) B28B1/08. Пристрій для ущільнення стінових блоків із бетонних сумішей / Заявники М.П. Нестеренко, О.В. Орисенко, М.М. Нестеренко. – Опубл. 26.08.2008. – Бюл. № 16. – 4 с.
13. Орисенко А.В. Конструкция ударно-встряхивающей установки для формирования стеновых блоков из лёгких бетонов на основе анализа конструктивных особенностей уплотняющих машин / А.В. Орисенко, Н.Н. Нестеренко // матер. Междунар. науч.-практ. конф. (2010 г., г. Волгоград): в 2-х ч. – ВолгГАСУ, 2011. – Ч. 1. – С. 227–233.
14. Iwatsubo T. Parametric instability of clamped-clamped and clamped-simply supported columns under periodic axial load. / T. Iwatsubo, M. Saigo, Y. Sugiyama // Journal of Sound Vibration. – 1973. – Vol. 30, No. 1. – P. 65–77.
15. Iwatsubo T. Simple and combination resonances of columns under periodic axial load / T. Iwatsubo, Y. Sugiyama, S. Ogsno // Journal of Sound Vibration. – 1974. – Vol. 33, No. 2. – P. 211–221.