

УДК 528.2

## ПРАКТИКА ЗАСТОСУВАННЯ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ ДО ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ МІСЯЦЯ

**В. Нікулішин**

Національний університет “Львівська політехніка”

**Ключові слова:** вейвлет, гравітаційне поле, маскон.

### Постановка проблеми

Вперше термін “вейвлет” вжили Гросман і Морле у середині 80-х років для аналізу властивостей сейсмічних і акустичних хвиль. З того часу вейвлет-аналіз застосовувався до багатьох задач, де потрібно кодувати або аналізувати сигнали. Вейвлет-перетворення, на відміну від перетворення Фур’є, представляє одночасно сигнал у частотній та часовій області, що дає змогу подати двовимірний сигнал у 3D-просторі та по-іншому інтерпретувати його. Вейвлет-перетворення поділяються на дискретні, які в основному застосовуються для різноманітних кодувань, та неперервні, за допомогою яких досліджують різноманітні фізичні процеси. Саме другий тип перетворень застосований в цій роботі.

### Зв’язок із важливими науковими і практичними завданнями

Останніми роками зростання цікавості до Місяця привело до появи великої кількості різноманітних даних, які потребують новітніх якісних способів опрацювання. Вже доведено важливість використання вейвлет-аналізу у задачах сейсмології, розпізнавання голосу та зображень, а нещодавно почали з’являтися роботи, які стосуються гравіметричних та магнітних полів Землі.

### Аналіз основних досліджень і публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Базові поняття про математичний апарат вейвлет-перетворень подано у роботах [1, 2]. В праці [1], крім теоретичного викладу, наведено ще й деякі модельні приклади фізичних процесів, до яких застосовані вейвлет-перетворення. Застосування вейвлет-аналізу до потенціальних полів детально описано в роботі [5]. Застосування вейвлет-функцій до магнітних і гравітаційних полів розглянуто в праці [4]. Методика, описана у дослідженні [3], дає змогу, крім глибин залягання аномальних мас, визначати і їхню густину.

### Невирішені частини загальної проблеми

Вейвлет-аналіз є порівняно новою методикою аналізу сигналу. І хоча в деяких сферах науки цей спосіб став практично незамінним, проте під час аналізу потенціальних полів виникають проблеми з підбором вейвлет-функції та нормуючого множника.

### Постановка завдання

Метою роботи є аналіз гравітаційного поля Місяця вздовж профілю з використанням різних вейвлет-функцій.

### Виклад основного матеріалу

Нехай аномальне гравітаційне поле задане в прямокутній системі координат, в якій по осі ординат відкладаємо аномалі  $\Delta g$ , а по осі абсцис відстань  $x$  вздовж профілю (рис. 1).

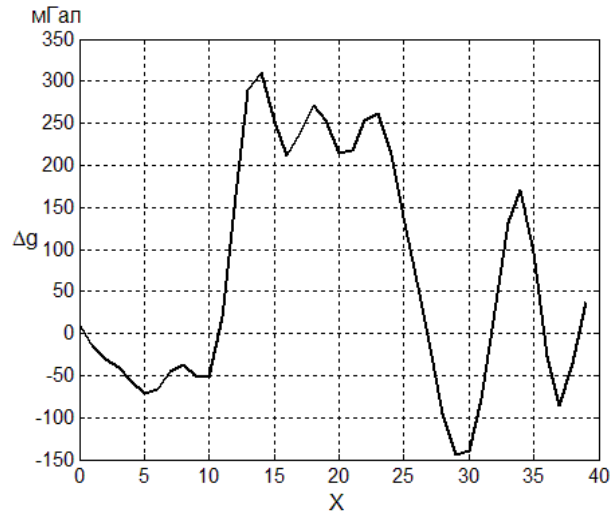


Рис. 1. Аномальне гравітаційне поле

У такому випадку вейвлет-перетворення функції  $\Delta g(x)$  можна подати у вигляді

$$W(x', h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x) \cdot \psi\left(\frac{x-x'}{h}\right) dx, \quad (1)$$

де  $\frac{1}{\sqrt{h}}$  – нормуючий множник,  $\psi\left(\frac{x-x'}{h}\right)$  – вейвлет-функція, в якій  $x'$  відповідає за локалізацію функції по осі  $x$ , а параметр  $h$  масштабує функцію. Якщо змінювати параметри  $x'$  та  $h$ , то в результаті отримаємо двовимірний масив значень  $W(x', h)$ , розмірність якого залежатиме від кількості  $x'$  та  $h$ . З формули (1) видно, що функція  $W(x', h)$  є скалярним добутком функції  $\Delta g(x)$  та вейвлет-функції, тому в місцях, де  $W(x', h)$  має екстремум  $\psi(x)$  та  $\Delta g(x)$  максимально схожі між собою в частотній області.

Сама функція  $\psi(x)$  називається материнським, або базовим, вейвлетом, повинна створювати ортогональний базис та володіти певними ознаками [1]. Перелічимо основні з них.

**Локалізація.** На відміну від перетворення Фур’є, базова функція у вейвлет-перетворенні локалізована як по осі абсцис, так і в частотній області (див. таблицю).

**Нульове середнє.** Графік вихідної функції повинен осцилювати (бути знакозмінним) навколо нуля на осі абсцис і мати нульову площу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (2)$$

Часто для практичних цілей необхідно, щоб не тільки нульовий, але і всі перші  $n$  моментів дорівнювали нулю

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot \psi(x) dx = 0. \quad (3)$$

Вейвлети з моментами  $n$ -го порядку дають змогу аналізувати тоншу (високочастотну) структуру сигналу.

**Обмеженість.** Квадрат норми функції повинен бути скінченним числом

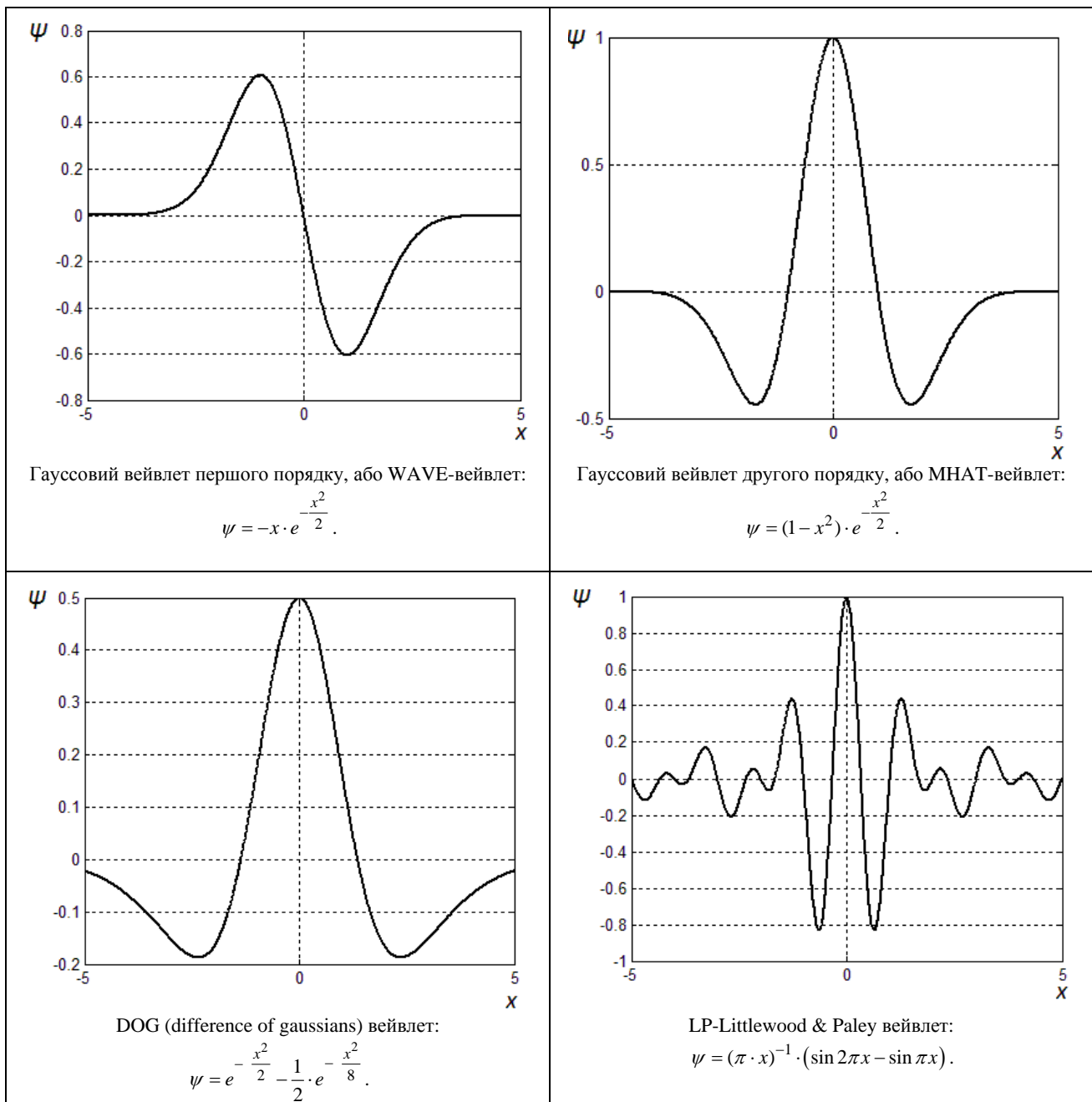
$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty. \quad (4)$$

**Автомодельність.** Характерною ознакою вейвлет-перетворення є його автомодельність. Всі вейвлети конкретної сім'ї  $\psi_{hx}(x)$  мають ту саму кількість осциляцій, що і материнський вейвлет  $\psi(x)$ , оскільки отримані з нього за допомогою масштабних перетворень  $h$  і зсуву  $x$ .

У таблиці графічно та аналітично подано чотири дійсні неперервні базисні вейвлет-функції.

Побудуємо профіль аномалії сили ваги ( $\Delta g(x)$ ) вздовж лінії, яка проходить через центр маскона Місяця Imbirum та є паралельною до екватора (рис. 2, а). Знайдемо коефіцієнти вейвлет-перетворення за формулою (1) для функції  $\Delta g(x)$ , використовуючи базисні вейвлет-функції з таблиці. Отримані в результаті вейвлет-спектри зображені на рис. 2, б-г.

### Графічне представлення дійсних неперервних базисних вейвлет-функцій



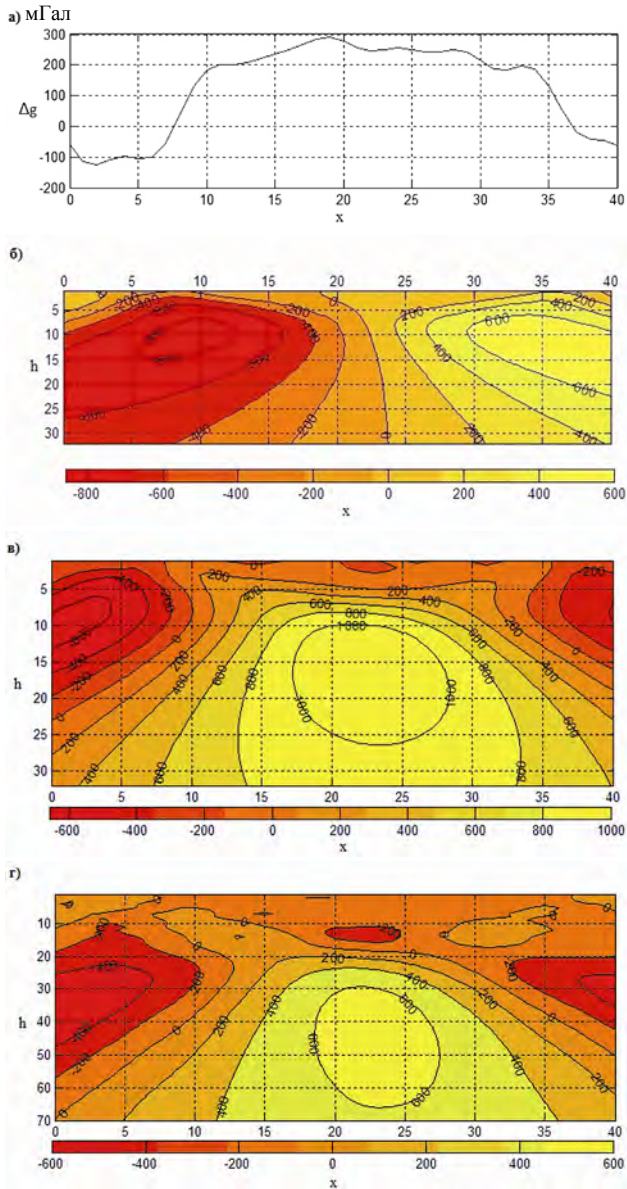


Рис. 2. а – аномальне гравітаційне поле ( $\Delta g(x)$ ). Вейвлет-спектр функції  $\Delta g(x)$ , побудований за допомогою: б – WAVE-вейвлета; в – MHAT-вейвлета; г – LP-Littlewood & Paley вейвлета

З рис. 2 видно, що використання різних базових вейвлетів дає можливість отримувати різні вейвлет-спектри. Ця особливість дає змогу використовувати такий вейвлет, який є характерним для конкретного фізичного процесу. Для цього випадку зіставимо  $h$ (км) з глибиною залягання аномальних мас, а значення амплітуд з аномальною густиною (в умовних одиницях). З отриманих спектрів бачимо, що глибина залягання аномальних мас та значення амплітуд змінюється залежно від використаного вейвлета. З цього зрозуміло, що неможливо точно визначити глибину та густину залягання аномальних мас без застосування додаткової інформації.

Всі вищезазначені базові вейвлети не наділені фізичним змістом, тому результати, наведені на рис. 2, важко інтерпретувати. У роботах [3, 4] пропонують

використовувати як базисні вейвлети функції гравітаційного потенціалу простих геометричних тіл та їхні похідні. Такі функції мають зрозуміліший фізичний зміст та відображають деякі властивості джерела гравітаційних аномалій, що значно спростить аналіз отриманого результату. Як приклад, розглянемо другу похідну від функції гравітаційного потенціалу кругового циліндра

$$\psi(x, h) = \frac{2h^2(h^2 - x^2)}{(h^2 + x^2)^2}. \quad (5)$$

На рис. 3 графічно представлена функція  $\psi(x, h)$  для значень  $h = 1$  та  $h = 2$ , а на рис. 4 – побудований на її основі вейвлет-спектр функції  $\Delta g(x)$ .

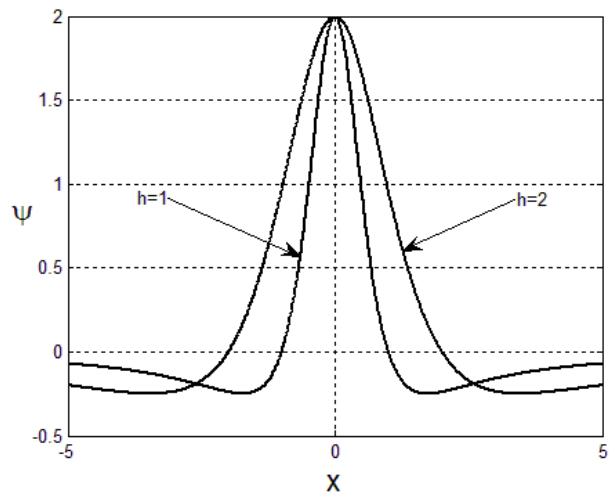


Рис. 3. Друга похідна від функції гравітаційного потенціалу кругового циліндра, представлена формулою (5)

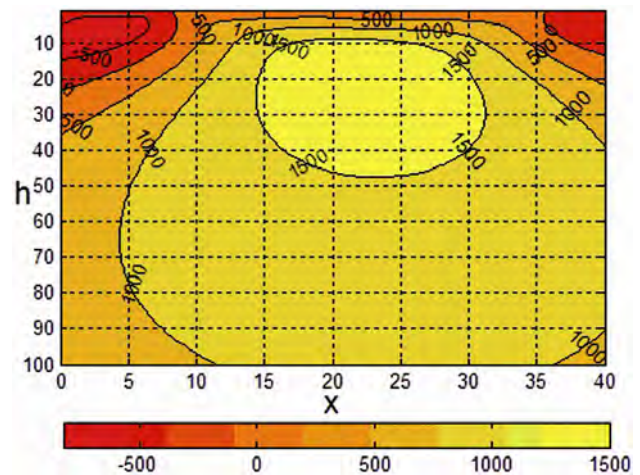


Рис. 4. Вейвлет-спектр функції  $\Delta g(x)$

Отже, отримавши вейвлет-спектр з використанням різних базисних вейвлетів, бачимо, що глибина залягання аномальних мас під морем Imbirum змінюється від 10 до 50 км, а густина від  $-800$  до  $1500$  в умовних одиницях. Для приведення цих величин до реальних потрібно скористатися додатковою інформацією, за допомогою якої визначити вигляд вейвлет-функції та нормуючого множника.

### Висновки

За допомогою вейвлет-аналізу можна будувати різні моделі розподілу мас за аномальним гравітаційним полем, використовуючи як аналізатори різні базові вейвлет-функції.

Отримані розподіли густини збігаються з гіпотезою про те, що аномальні маси, які утворюють маскони, містяться в корі Місяця, яка має товщину 60 км, або у верхніх шарах мантії.

У подальших дослідженнях плануємо проаналізувати гравітаційне поле з використанням тривимірної вейвлет-функції, в результаті чого буде отримано вейвлет-спектр для всього Місяця.

### Практика застосування вейвлет-аналізу до гравітаційного поля Місяця

В. Нікулішин

Проведено дослідження гравітаційного поля Місяця в районі маскона Imbirum з використанням неперервного вейвлет-перетворення.

### Практика применения вейвлет-анализа к гравитационному полю Луны

В. Никулишин

Проведены исследования гравитационного поля Луны в районе маскона Imbirum с использованием непрерывного вейвлет-преобразования.

### The use of wavelet analysis to gravitational field of the Moon

V. Nikulishyn

It is investigated the gravitational field of the Moon in the domain of mascon Imbirum using continuous wavelet transform.

### Література

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н. Астафьев // Успехи физических наук. – Т.166. – № 11. – 1996. – С. 1145–1170. [Электронный ресурс] – Режим доступа до джерела: [http://www.isuct.ru/~artcol/articles/Uspekhi\\_Fiz\\_Nauk/wavelet-analys.pdf](http://www.isuct.ru/~artcol/articles/Uspekhi_Fiz_Nauk/wavelet-analys.pdf)
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – М., 2001. – 461 с.
3. Утёмов Э.В. Технология обработки и интерпретации гравиметрических данных на основе “естественного” вейвлет-преобразования / Э. Утёмов, Д. Нургалиев, Г. Хамидуллина // Ученые записки Казанского университета. Серия: Естественные науки. – Т. 1, Кн. 3. – 2010. – С. 208–222 [Электронный ресурс] – Режим доступа до джерела: <http://elibrary.ru/item.asp?id=15519850>
4. Cooper G.R.J. Interpreting potential field data using continuous wavelet transforms of their horizontal derivatives / G. Cooper // Computers & Geosciences. – University of the Witwatersrand, Johannesburg. – № 32. – 2006. – P. 984–992 [Электронный ресурс] – Режим доступа до джерела: [https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2008/1/GF700/1/material\\_docente/bajar?id\\_material=174805](https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2008/1/GF700/1/material_docente/bajar?id_material=174805)
5. Moreau F. Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Basic theory / F. Moreau, D. Gibert, M. Holschneider, G. Saracco // J. Geophys. – V. 104. – № B3. – 1999. – P. 5003–5013 [Электронный ресурс] – Режим доступа до джерела: [ftp://ftpobs.univ-bpclermont.fr/GEOL/volcano/Augier/biblio/ondelettes/moreau\\_jgr1999.pdf](ftp://ftpobs.univ-bpclermont.fr/GEOL/volcano/Augier/biblio/ondelettes/moreau_jgr1999.pdf)

## Для реформування та розвитку житлово-комунального господарства!



- аналіз стану та тенденцій
- основи формування
- геоінформаційні технології

Лагоднюк О.А.  
ОРГАНІЗАЦІЯ ПРИБУДИНКОВИХ ТЕРИТОРІЙ ЖИТЛОВИХ БАГАТОКВАРТИРНИХ БУДИНКІВ  
Монографія / О.А. Лагоднюк, П.Г. Черняга.  
Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. 176 с.  
ISBN 978-617-607-265-2