ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
Вип.625 № 625, (2008) с. 12–19

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
“LVIVSKA POLITECHNIKA”
“Physical & mathematical sciences”
Vol.625 No 625, (2008) 12–19

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В.С. Ільків[a], Т.В. Магеровська[b]

[a] *Національний університет “Львівська Політехніка”*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна
[b] *Львівський державний університет внутрішніх справ*
вул. Городоцька 26, 79007, Львів, Україна

(Отримано 1 листопада 2008 р.)

В області, що є декартовим добутком відрізка $[0, T]$ і p-вимірного тора Ω_p, досліджено нелокальну задачу з загальними інтегральними умовами для строго гіперболічного (хвильового) рівняння $u_{tt} = a^2\Delta u$, де $a = a(t) > 0$ — неперервно диференційовна на відрізку $[0, T]$ функція, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{p} \partial^2/\partial x_j^2$ — оператор Лапласа.

Задача є некоректною за Адамаром і пов'язана з проблемою малих знаменників. За допомогою метричного підходу та використання ізоморфізму просторів доведено теорему про оцінки знизу малих знаменників. На основі таких оцінок отримано умови існування та єдиності розв'язку задачі у просторах Соболєва періодичних за змінними $x_1, \ldots, x_p$ функцій.

Ключові слова: рівняння з частинними похідними, інтегральні умови, простори Соболєва, малі знаменники.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.946

Вступ

Задачі з інтегральними нелокальними умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними досліджені багатьма авторами. Зокрема, в роботах [1, 6, 7, 8] вивчено властивості розв'язків та коректність таких задач у деяких функціональних просторах у шарі $[0, T] \times \mathbb{R}^p$. Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення розглянуто у [2, 3, 9].

У роботах [4, 5] вивчено задачі з інтегральними умовами для диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами у шкалах просторів Соболєва періодичних за просторовими змінними функцій. Ці задачі є некоректними за Адамаром, а умови їх розв'язності пов'язані з проблемою оцінювання знизу малих знаменників, які виникають в рядах Фур'є, що зображають формальні розв'язки цих задач.

Проблему малих знаменників вирішено на основі метричного підходу [12, 13, 14]. У рамках цього підходу розглядається не окрема задача, а множина задач. Елементами цієї множини є задачі із фіксованими даними (коефіцієнтами диференціальних рівнянь, коефіцієнтами крайових умов чи іншими параметрами), які утворюють певну область у просторі даних. Існування та єдиність розв'язку у відповідній шкалі просторів доводено для майже усіх (за мірою Лебега) точок згадуваної області або для усіх точок підобласті, міра якої відрізняється від міри області на довільне мале число.

Для рівнянь зі змінними коефіцієнтами існують приклади нелокальних задач, які не є розв'язними у шкалі просторів Соболєва. Зокрема, нелокальна задача з інтегральною умовою для одного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0, 2\pi) \times \Omega_1,$$

$$\int_0^{2\pi} u(\tau, x)\, d\tau = \varphi(x), \quad x \in \Omega_1,$$

де $\varphi(x) \notin \mathbf{H}_q(\Omega_1)$ для деякого дійсного q; $2\pi\alpha$ — довільне ірраціональне число, має єдиний розв'язок.

Він визначається за формулою

$$u(t, x) = iaD \exp(iaDt + \sin t \cdot D^2)\big(e^{i2\pi aD} - 1\big)^{-1}\varphi(x),$$

де $D = -i\partial/\partial x$, але для усіх дійсних чисел q

$$u(\pi/2, \cdot) \notin \mathbf{L}_2(\Omega_1).$$

У цій роботі показано, що для строго гіперболічних рівнянь задача із загальними лінійними інтегральними умовами розв'язна у просторах Соболєва. Розглянуто інтегральну задачу для рівняння типу коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(t)\Delta u.$$

Встановлено оцінки знизу для малих знаменників, які виникли під час дослідження задачі, та гладкість і оцінку норми розв'язку задачі у просторах Соболєва.

I. Постановка задачі

Позначимо p-вимірний тор змінної $x = (x_1, \ldots, x_p)$ через Ω_p, циліндричну область змінних t та x – через $\mathcal{D}^p$, а саме: $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $\mathcal{D}^p = [0, T] \times \Omega_p$.

В області $\mathcal{D}^p$ розглядається строго гіперболічне (хвильове) рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u = 0 \tag{1}$$

й інтегральні умови

$$\int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau, \cdot) \\ \partial u/\partial t(\tau, \cdot) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_p^2}$, $a(t) > 0$ – неперервно диференційовна на відрізку $[0, T]$ функція, коефіцієнти b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} — комплексні інтегровні на $[0, T]$ функції, модуль інтеграла від яких не перевищує одиницю:

$$\max_{\alpha,\beta=1,2} \Big| \int_0^T b_{\alpha,\beta}(\tau)\, d\tau \Big| \leq 1.$$

Функції $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ є заданими 2π-періодичними функціями, а функція $u = u(t, x)$ є шуканим 2π-періодичним розв'язком задачі (1), (2).

Для довільного дійсного числа q введемо простір 2π-періодичних функцій $\mathbf{H}_q(\Omega_p)$, який є поповненням множини многочленів $\varphi(x) = \sum\limits_k \widehat{\varphi}(k) e^{ikx}$ за нормою

$$\|\varphi\|^2_{\mathbf{H}_q(\Omega_p)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} |\widehat{\varphi}(k)|^2,$$

де $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $kx = k_1 x_1 + \cdots + k_p x_p$, $\widetilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \cdots + k_p^2}$.

Простори $\mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, утворюють шкалу просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ за змінною q.

Вивчається питання розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$, а саме – встановлюються умови, за яких задача (1), (2) має розв'язок u, який для усіх значень $t \in [0, T]$ разом із похідною по t належить до шкали просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ для довільних елементів φ_1 та φ_2 із цієї шкали.

Означення 1. Розв'язком задачі (1), (2) із шкали просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ називаємо двічі неперервно диференційовну на інтервалі $[0, T]$ функцію u таку, що для кожного $t \in [0, T]$ елементи $u(t, \cdot)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)$ належать до шкали просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$, і u задовольняє рівняння (1) та умови (2) у слабкому сенсі, тобто для усіх $t \in [0, T]$ та для усіх тригонометричних многочленів $w = w(x)$ виконуються рівності

$$\int_{\Omega_p} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u \Big) w\, dx = 0,$$

$$\int_{\Omega_p} \Big[\int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau, \cdot) \\ \partial u/\partial t(\tau, \cdot) \end{pmatrix} d\tau - \\ - \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \Big] w\, dx = 0.$$

Зауважимо, якщо функція u є розв'язком задачі (1), (2) і $u \in \mathbf{H}_\sigma(\Omega_p)$, то справджується включення $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega_p)$, причому

$$\Big\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \cdot) \Big\|_{\mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega_p)} \leq a(t) \|u\|_{\mathbf{H}_\sigma(\Omega_p)}.$$

II. Побудова та оцінка розв'язку

Введемо вектор-функції

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

і запишемо задачу (1), (2) у векторно-матричному вигляді

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2(t)\Delta & 0 \end{pmatrix} U, \tag{4}$$

$$\int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix} U(\tau, x)\, d\tau = \varphi(x). \tag{5}$$

Якщо вектор-функція

$$U(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} U_k(t) e^{ikx},$$

а вектор-функція

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widehat{\varphi}(k) e^{ikx},$$

де

$$U_k(t) = \begin{pmatrix} U_{k1}(t) \\ U_{k2}(t) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\varphi}(k) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1(k) \\ \widehat{\varphi}_2(k) \end{pmatrix},$$

то, згідно з означенням 1, вектор-функція $U_k = U_k(t)$ є розв'язком нелокальної задачі

$$\frac{dU_k}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(t)\|k\|^2 & 0 \end{pmatrix} U_k, \tag{6}$$

$$\int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix} U_k(\tau)\, d\tau = \widehat{\varphi}(k), \tag{7}$$

причому $\|k\|^2 = \widetilde{k}^2 - 1 = k_1^2 + \cdots + k_p^2$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

Із рівностей $u_k(t) = U_{k1}(t)$, $\dfrac{du_k}{dt}(t) = U_{k2}(t)$ випливає, що розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} U_{k1}(t) e^{ikx}, \quad \frac{du}{dt}(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} U_{k2}(t) e^{ikx}.$$

Якщо $k \neq 0$, то матриця системи (6)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(t)\|k\|^2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho_k^2(t) & 0 \end{pmatrix},$$

де $\rho_k(t) = ia(t)\|k\|$, має два прості уявні власні значення $\rho_k(t)$ та $-\rho_k(t)$.

За умови $k=0$ власні значення $\pm\rho_k(t)$ збігаються, а матриця системи (6) має вигляд $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, тобто

$$\frac{dU_{k1}}{dt}=U_{k2}, \qquad \frac{dU_{k2}}{dt}=0.$$

Загальний розв'язок цієї системи диференціальних рівнянь

$$U_k(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{01}\\ C_{02}\end{pmatrix}$$

під час підстановки в умову (7) дає систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix}\int\limits_0^T b_{11}(\tau)\,d\tau & \int\limits_0^T \big(\tau b_{11}(\tau)+b_{12}(\tau)\big)\,d\tau\\ \int\limits_0^T b_{21}(\tau)d\tau & \int\limits_0^T \big(\tau b_{21}(\tau)+b_{22}(\tau)\big)\,d\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{01}\\ C_{02}\end{pmatrix}= =\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1(0)\\ \widehat{\varphi}_2(0)\end{pmatrix} \qquad (8)$$

для визначення сталих C_{01} і C_{02}. Визначник $\det\Delta(0)$ матриці $\Delta(0)$ системи (8) має вигляд

$$\int\limits_0^T b_{11}(\tau)\,d\tau\int\limits_0^T b_{22}(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^T b_{21}(\tau)\,d\tau\int\limits_0^T b_{12}(\tau)\,d\tau+ +\int\limits_0^T b_{11}(\tau)\,d\tau\int\limits_0^T \tau b_{21}(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^T b_{21}(\tau)\,d\tau\int\limits_0^T \tau b_{11}(\tau)\,d\tau.$$

Якщо $\det\Delta(0)=0$, то система (8) не має розв'язку або має безліч розв'язків, якщо ж $\det\Delta(0)\neq 0$, то система (8) має єдиний розв'язок

$$\begin{pmatrix}C_{01}\\ C_{02}\end{pmatrix}=\Delta^{-1}(0)\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1(0)\\ \widehat{\varphi}_2(0)\end{pmatrix}.$$

Якщо $k\neq 0$, а отже $\rho_k(t)\neq 0$ на $[0,T]$, то маємо для матриці системи (6) таку факторизацію:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \rho_k^2(t) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}\times \times\begin{pmatrix}\rho_k(t) & 0\\ 0 & -\rho_k(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}^{-1},$$

причому

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}=-2\rho_k(t),$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \rho_k^{-1}(t)\\ 1 & -\rho_k^{-1}(t)\end{pmatrix}.$$

Зробимо заміну шуканих вектор-функцій

$$U_k(t)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}Z_k(t),$$

тоді нова шукана вектор-функція

$$Z_k(t)=\begin{pmatrix}1 & \rho_k^{-1}(t)\\ 1 & -\rho_k^{-1}(t)\end{pmatrix}\frac{U_k(t)}{2}$$

є розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dZ_k}{dt}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\frac{d\rho_k(t)}{dt}Z_k= =\begin{pmatrix}\rho_k(t) & 0\\ 0 & -\rho_k(t)\end{pmatrix}Z_k.$$

Враховуючи, що $\dfrac{d\rho_k(t)}{dt}=ia'(t)\|k\|$, маємо таку задачу для знаходження функції Z_k:

$$\frac{dZ_k}{dt}=\rho_k(t)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}Z_k+\frac{a'(t)}{2a(t)}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}Z_k, \qquad (9)$$

$$\int_0^T\begin{pmatrix}b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau)\\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(\tau) & -\rho_k(\tau)\end{pmatrix}Z_k(\tau)\,d\tau= =\widehat{\varphi}(k). \qquad (10)$$

Розв'язок задачі існує, єдиний і має вигляд

$$Z_k(t)=Y_k(t)\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k) \qquad (11)$$

під час виконання умови

$$\det\Delta(k)\neq 0, \qquad (12)$$

де $Y_k(t)$ – нормальна в точці $t=0$ фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (9), матриця $\Delta(k)$ визначається за формулою

$$\Delta(k)=\int_0^T\begin{pmatrix}b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau)\\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau)\end{pmatrix}\times \times\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(\tau) & -\rho_k(\tau)\end{pmatrix}Y_k(\tau)\,d\tau. \qquad (13)$$

Нехай $\|A\|$ позначає евклідову норму матриці A, тобто $\|A\|=\sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})}$, де A^* — ермітово спряжена з матрицею A матриця, $\mathrm{tr\,B}$ — слід матриці B. Оцінки зверху норми $\|Y_k\|$ фундаментальної матриці $Y_k=Y_k(t)$ наведено у наступних трьох лемах [10, 11].

Лема 1. *Якщо функція $a(t)$ є сталою на проміжку $[0,T]$, то функція $\|Y_k\|$ є також сталою на цьому проміжку, причому $\|Y_k(t)\|=\|Y_k(0)\|=\sqrt{2}$.*

Нехай похідна $a'(t)$ змінює на $[0,T]$ свій знак $l-1$ раз, де $l\in\mathbb{N}$, і $t_0=0$, $t_l=T$, тоді існують числа $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_l$ та за $l\geq 2$ числа $t_1,t_2,\dots,t_{l-1}$ такі, що для $j=1,\dots,l$ виконуються нерівності $t_{j-1}<\tau_j<t_j$, на проміжку $[t_{j-1},t_j]$ функція $a'(t)$ не змінює знак і для $j=1,\dots,l-1$ виконуються умови

$$a'(\tau_j)a'(\tau_{j+1})<0, \qquad a'(t_j)=0.$$

Позначимо через A_j, $j=0,1,\dots,l$, значення функції $a(t)$ у точці t_j: $A_j=a(t_j)$.

Лема 2. *Нехай похідна $a'(t)$ функції $a(t)$ на проміжку $[0,T]$ змінює свій знак $l-1$ раз, $l\in\mathbb{N}$, тоді на проміжках $[t_{j-1},t_j]\subset[0,T]$ справджуються такі оцінки для фундаментальної матриці системи диференціальних рівнянь (9):*

$$\frac{A_{2s-2}}{a(t)}\prod_{j=1}^{s-1}\frac{A_{2j-2}}{A_{2j-1}}\le\frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}}\le\prod_{j=1}^{s-1}\frac{A_{2j-1}}{A_{2j}},\qquad(14)$$

якщо $t\in[t_{2s-2},t_{2s-1}]$ і $a'(\tau_1)>0$,

$$\prod_{j=1}^{s-1}\frac{A_{2j-1}}{A_{2j}}\le\frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_{2s-2}}{a(t)}\prod_{j=1}^{s-1}\frac{A_{2j-2}}{A_{2j-1}},\qquad(15)$$

якщо $t\in[t_{2s-2},t_{2s-1}]$ і $a'(\tau_1)<0$,

$$\prod_{j=1}^{s}\frac{A_{2j-2}}{A_{2j-1}}\le\frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_{2s-1}}{a(t)}\prod_{j=1}^{s-1}\frac{A_{2j-1}}{A_{2j}},\qquad(16)$$

якщо $t\in[t_{2s-1},t_{2s}]$ і $a'(\tau_1)>0$,

$$\frac{A_{2s-1}}{a(t)}\prod_{j=1}^{s-1}\frac{A_{2j-1}}{A_{2j}}\le\frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}}\le\prod_{j=1}^{s}\frac{A_{2j-2}}{A_{2j-1}},\qquad(17)$$

якщо $t\in[t_{2s-1},t_{2s}]$ і $a'(\tau_1)<0$. У формулах (14)–(17) вважаємо $\prod\limits_{j=1}^{s-1}\cdots=1$, якщо $s=1$.

Нехай $A=A_{\max}/A_{\min}>1$, де $A_{\max}=\max\limits_{t\in[0,T]}a(t)$, $A_{\min}=\min\limits_{t\in[0,T]}a(t)$, тобто число A визначає розмах коливань функції $a(t)$, J — ціла частина числа $(l+1)/2$.

Лема 3. *На проміжку $[0,t_{2j}]\subset[0,T]$ справджуються оцінки*

$$A^{-j}\le\frac{\|Y_k(t)\|a(t)}{\sqrt{2}A_0}\le A^j,\qquad(18)$$

а на проміжку $[0,T]$ – оцінки

$$A^{-J}\le\frac{\|Y_k(t)\|a(t)}{\sqrt{2}A_0}\le A^J.\qquad(19)$$

III. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі

За допомогою оцінок (18) та (19) встановимо достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у шкалі просторів Соболєва.

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти Фур'є $\widehat{\varphi}(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, вектор-функції φ задовольняють умову*

$$\left\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\|\le C_1\widetilde{k}^{\sigma},\qquad(20)$$

де $C_1>0$, $\sigma\in\mathbb{R}$ – деякі сталі, які не залежать від вектора k, то у шкалі просторів Соболєва існує єдиний розв'язок $u=u(t,x)$ задачі (1), (2) такий, що для усіх $t\in[0,T]$

$$u(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_p),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{\sigma_1-1}(\Omega_p),\qquad(21)$$

де $\sigma_1<-\sigma-p/2$.

$\square$ *Доведення.* Із формули (11) отримаємо рівність

$$\begin{pmatrix}\rho_k(t)&0\\0&1\end{pmatrix}U_k(t)=\begin{pmatrix}\rho_k(t)&0\\0&1\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}1&1\\\rho_k(t)&-\rho_k(t)\end{pmatrix}Y_k(t)\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)=$$
$$=i\|k\|a(t)\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}Y_k(t)\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k),$$

з якої, переходячи до норм, маємо скалярну рівність

$$\left(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2\right)^{1/2}=$$
$$=\sqrt{2}\|k\|a(t)\cdot\left\|Y_k(t)\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\|.$$

Оцінюючи норму справа, знайдемо

$$\left(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2\right)^{1/2}\le$$
$$\le\sqrt{2}\|k\|a(t)\cdot\|Y_k(t)\|\cdot\left\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\|.$$

Використовуючи формулу (19), отримаємо для усіх $t\in[0,T]$ таку нерівність:

$$\left(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2\right)^{1/2}\le$$
$$\le2\|k\|A_0A^J\cdot\left\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\|,\qquad(22)$$

або, враховуючи формулу (20), — нерівність

$$\left(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2\right)^{1/2}\le$$
$$\le2C_1A_0A^J\widetilde{k}^{\sigma+1}.\qquad(23)$$

Оскільки для усіх векторів $k\ne0$ виконуються нерівності $\widetilde{k}^2\le2\|k\|^2$ і

$$\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2\le2A_{\min}^{-2}\left(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2\right),\qquad(24)$$

$$\left|\frac{du_k(t)}{dt}\right|^2\le a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2,\qquad(25)$$

то з нерівностей (23)–(25) випливають нерівності

$$\widetilde{k}^{2\sigma_1}|u_k(t)|^2\le\frac{8C_1^2A_0^2A^{2J}}{A_{\min}^2}\widetilde{k}^{\sigma_2},$$

$$\widetilde{k}^{2\sigma_1-2}\left|\frac{du_k(t)}{dt}\right|^2\le4C_1^2A_0^2A^{2J}\widetilde{k}^{\sigma_2},$$

де $\sigma_2=2(\sigma_1+\sigma)<-p$. Обчислюючи норми розв'язку u та його похідної $\partial u/\partial t$, отримаємо незалежні від t оцінки

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_p)}\le|u_0(t)|^2+\frac{8C_1^2A_0^2A^{2J}}{A_{\min}^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{\sigma_2}<\infty,$$

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{\mathbf{H}_{\sigma_1-1}(\Omega_p)} \le \Big|\frac{du_0(t)}{dt}\Big|^2 + \\ + 4C_1^2A_0^2A^{2J}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{\sigma_2} < \infty,$$

які завершують доведення теореми. ■

Умови (20) теореми 1 пов'язані з правими частинами φ_1 і φ_2 нелокальних умов (2). Для одних правих частин вони виконуються, а для інших не виконуються, крім того, немає залежності числа σ від гладкості цих правих частин. Для встановлення розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ дослідимо умови, за яких виконуються нерівності (20) зразу для всіх функцій φ_1 та φ_2 із певного простору шкали $\mathbf{H}(\Omega_p)$.

Для цього на основі нерівності (19) випишемо таку оцінку для лівої частини нерівності (20) через норму правої частини $\widehat{\varphi}(k)$ умов (7):

$$\big\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\big\| \le \frac{C_2\widetilde{k}}{|\det\Delta(k)|}\|\widehat{\varphi}(k)\|, \qquad (26)$$

де додатна стала C_2 не залежить від k та $\widehat{\varphi}(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$.

IV. Дослідження малих знаменників

Наступним кроком після встановлення оцінки (26) є встановлення оцінок знизу виразів $|\det\Delta(k)|$, $k\in\mathbb{Z}^p$, які залежать від функцій $b_{11}(t)$, $b_{12}(t)$, $b_{21}(t)$, $b_{22}(t)$. Вважаємо, що ці функції абсолютно інтегровні, тобто належать до простору $\mathbf{L}_1(0,T)$.

Позначимо B_{ij} середнє значення функції b_{ij}, а саме:

$$B_{ij} = \frac{1}{T}\int_0^T b_{ij}(\tau)\,d\tau,$$

тоді визначена формулою $b^0_{ij}(t) = b_{ij}(t) - B_{ij}$ функція b^0_{ij} має нульове середнє значення

$$\frac{1}{T}\int_0^T b^0_{ij}(\tau)\,d\tau = 0,$$

а також $b_{ij}{=}B_{ij}{+}b^0_{ij}$ де $(B_{ij}, b^0_{ij}){\in}\mathbb{R}\times\mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$, причому $\mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$ означає підпростір функцій із простору $\mathbf{L}_1(0,T)$, що мають нульове середнє значення.

Отже, простір $\mathbf{L}_1(0,T)$ є ізоморфним декартовому добутку $\mathbb{R}\times\mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$, а саме – він є прямою сумою відповідних просторів: $\mathbf{L}_1(0,T) = \mathbb{R}\oplus\mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$.

Такі ізоморфізми просторів і декартових добутків широко використовуються для дослідження функціонально-диференціальних рівнянь [15, с. 15].

Вектор $\alpha = (B_{11}, B_{22}) \in \mathcal{O}^2$, де $\mathcal{O}$ – одиничний круг з центром у початку координат комплексної площини, вважаємо вектором параметрів задачі (1), (2), а функції b^0_{11}, b_{12}, b_{21}, b^0_{22} фіксуємо.

Якою б малою не була (наперед задана фіксована) функція $\chi(k)$, знайдеться такий вектор $\alpha\in\mathcal{O}^2$, що безліч разів виконується нерівність

$$|\det\Delta(k)| < \chi(k).$$

Знаменники з такими властивостями мають назву малих знаменників. Вирішення проблеми малих знаменників, тобто встановлення для них оцінки знизу, є задачею метричної теорії діофантових наближень, в основі якої покладено метричний підхід до розглядуваних задач.

Малі знаменники виникають під час дослідження різних задач для диференціальних та диференціально-операторних рівнянь, а також задач в інших галузях математики [12, 13, 14]. Ці задачі, як правило, є некоректними (умовно коректними).

Для встановлення оцінок знизу знаменників у формулі (26) також використаємо метричний підхід. Використовуємо позначення $\operatorname{meas}\Lambda$, де $\Lambda\subset\mathcal{O}^2$, для позначення міри множини Λ. Ця міра індукується мірою Лебега у просторі $\mathbb{R}^4$.

Якщо $b_{jj} = B_{jj} + b^0_{jj}$, $j = 1,2$, то умови (2) записують у вигляді

$$\begin{pmatrix}B_{11} & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}\int_0^T\begin{pmatrix}u(\tau,\cdot)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\tau,\cdot)\end{pmatrix}d\tau + \\ + \int_0^T\begin{pmatrix}b^0_{11}(\tau) & b_{12}(\tau)\\ b_{21}(\tau) & b^0_{22}(\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(\tau,\cdot)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\tau,\cdot)\end{pmatrix}d\tau = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},$$

а матриця (13) за $k\neq 0$ є сумою двох матриць, тобто

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix}B_{11} & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}\Delta_1(k) + \Delta_2(k), \qquad (27)$$

де матриці $\Delta_1(k)$ і $\Delta_2(k)$ не залежать від параметрів B_{11} та B_{22} і визначаються такими формулами:

$$\Delta_1(k) = \int_0^T\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(\tau) & -\rho_k(\tau)\end{pmatrix}Y_k(\tau)\,d\tau,$$

$$\Delta_2(k) = \int_0^T\begin{pmatrix}b^0_{11}(\tau) & b_{12}(\tau)\\ b_{21}(\tau) & b^0_{22}(\tau)\end{pmatrix}\times \\ \times\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(\tau) & -\rho_k(\tau)\end{pmatrix}Y_k(\tau)\,d\tau.$$

За $k=0$ маємо також рівність (27), причому

$$\Delta_1(0) = \begin{pmatrix}T & T^2/2\\ 0 & T\end{pmatrix},$$

$$\Delta_2(0) = \begin{pmatrix}0 & \int_0^T\tau b^0_{11}(\tau)\,d\tau + B_{12}\\ B_{21} & \int_0^T\tau b_{21}(\tau)\,d\tau\end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Нехай для деяких дійсних сталих $C_3>0$ та r_1 для усіх векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується умова*

$$|\det\Delta_1(k)| \ge C_3^{-1}\widetilde{k}^{-r_1}, \qquad (28)$$

тоді для довільних дійсних чисел r_2, $r_2>p$, та ε, $0<\varepsilon<1$, а також для усіх векторів $\alpha\in\mathcal{O}^2\setminus B_\varepsilon$ і для усіх векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\det\Delta(k)| \ge \frac{\varepsilon}{C_3C_4(r_2)}\widetilde{k}^{-r_1-r_2}, \qquad (29)$$

де B_ε – деяка множина з мірою Лебега $\operatorname{meas} B_\varepsilon \le \varepsilon$, *стала* $C_4(r_2)$ *визначається за формулою*

$$C_4(r_2) = 2\pi^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{-r_2}.$$

$\square$ *Доведення.* Позначимо через $B(k)$ множину тих векторів $\alpha \in \mathcal{O}^2$, які за фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p$ задовольняють оцінку, протилежну до оцінки (29), а саме:

$$|\det\Delta(k)|/|\det\Delta_1(k)| < d^2(k) \equiv \frac{\varepsilon}{C_4(r_2)}\widetilde{k}^{-r_2}, \quad (30)$$

де $d(k) = \sqrt{\varepsilon/C_4(r_2)}\,\widetilde{k}^{-r_2/2}$.

Згідно з формулою (27), отримаємо таку факторизацію:

$$\det\Delta(k)/\det\Delta_1(k) = \big(B_{11} + \Delta^{11}(k)\big)\times \\ \times\Big(B_{22} + \Delta^{22}(k) - \frac{\Delta^{12}(k)\Delta^{21}(k)}{B_{11}+\Delta^{11}(k)}\Big), \quad (31)$$

де $\begin{pmatrix}\Delta^{11}(k) & \Delta^{12}(k)\\ \Delta^{21}(k) & \Delta^{22}(k)\end{pmatrix} = \Delta_2(k)\Delta_1^{-1}(k)$.

Розглянемо множину тих чисел $B_{11}\in\mathcal{O}$, для яких виконується нерівність

$$|B_{11} + \Delta^{11}(k)| < d(k) \quad (32)$$

за фіксованого елемента B_{22} вектора $\alpha \in \mathcal{O}^2$. Ця множина є частиною круга радіуса $d(k)$, тому її міра менша, ніж площа $\pi d^2(k)$ цього круга. Інтегруючи по змінній B_{22} на множині $\mathcal{O}$, отримаємо оцінку $\operatorname{meas} B'(k) < \pi^2 d^2(k)$, де $B'(k)$ – множина векторів $\alpha\in\mathcal{O}^2$, для яких виконується нерівність (32).

Розглянемо множину тих чисел B_{22}, для яких за фіксованого елемента B_{11} вектора $\alpha \in \mathcal{O}^2 \setminus B'(k)$ виконується нерівність

$$\Big|B_{22} + \Delta^{22}(k) - \frac{\Delta^{12}(k)\Delta^{21}(k)}{B_{11}+\Delta^{11}(k)}\Big| < d(k), \quad (33)$$

Ця множина також має міру, меншу, ніж число $\pi d^2(k)$, тому множина $B''(k)$ тих $\alpha \in \mathcal{O}^2\setminus B'(k)$, для яких виконується нерівність (33), має міру $\operatorname{meas} B''(k) < \pi^2 d^2(k)$.

Якщо $\alpha \notin B'(k)\cup B''(k)$, то виконуються протилежні до нерівностей (32) і (33) нерівності, а отже, згідно з формулою (31) не виконується оцінка (30), тому із формули (28) випливає нерівність (29), тобто $B(k) \subset B'(k)\cup B''(k)$ і справджується нерівність

$$\operatorname{meas} B(k) < 2\pi^2 d^2(k) = \frac{2\pi^2\varepsilon}{C_4(r_2)}\widetilde{k}^{-r_2}. \quad (34)$$

На множині $\mathcal{O}^2\setminus B(k)$ функція $|\det\Delta(k)|$ вектора α задовольняє умову (29) для фіксованого ненульового цілочислового вектора k, а на множині

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p}\big(\mathcal{O}^2\setminus B(k)\big) = \mathcal{O}^2\setminus B_\varepsilon, \qquad B_\varepsilon = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p} B(k),$$

де

$$\operatorname{meas} B_\varepsilon \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\operatorname{meas} B(k) < 2\pi^2\varepsilon C_4^{-1}(r_2)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{-r_2} = \varepsilon,$$

оцінка (29) виконується для усіх векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. $\blacksquare$

Тепер із отриманої нерівності (29) та формули (26) маємо нерівність

$$\big\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\big\| \le \varepsilon^{-1}C_5'(r_2)\widetilde{k}^{1+r_1+r_2}\|\widehat{\varphi}(k)\|, \quad (35)$$

де $C_5'(r_2) = C_2C_3C_4(r_2)$. Цю нерівність застосовуємо під час доведення наступної теореми.

Теорема 2. *Якщо виконується умова* (28), *то для довільної пари чисел* $r_2 > p$ *і* $0 < \varepsilon < 1$ *існує така множина* B_ε, *міра якої* $\operatorname{meas} B_\varepsilon < \varepsilon$, *що для усіх функцій* $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_p)$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_p)$ *існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі* (1), (2), *причому* $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_1(\Omega_p)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_0(\Omega_p)$ *для усіх векторів* α *із множини* $\mathcal{O}^2\setminus B_\varepsilon$, *а також виконується нерівність*

$$\varepsilon\cdot\max_{t\in[0,T]}\Big\{\|u(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}_1(\Omega_p)}, \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\Big\|_{\mathbf{H}_0(\Omega_p)}\Big\} \le \\ \le C_5\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_p)}, \quad (36)$$

де $C_5 = C_5'(r_2)\max\big\{\sqrt{2+T^2}, 2\sqrt{2}A_0A^JA_{\min}^{-1}, 2A_0A^J\big\}$, *число* $l-1$ *означає кількість змін знака функції* $a'(t)$ *на проміжку* $[0,T]$, J *– ціла частина числа* $(l+1)/2$, $A = A_{\max}/A_{\min}$.

$\square$ *Доведення.* Для ненульових векторів k із формул (22), (24), (25) маємо такі нерівності:

$$\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2 \le 8\widetilde{k}^2A_0^2A^{2J}A_{\min}^{-2}\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\|^2,$$

$$\Big|\frac{du_k(t)}{dt}\Big|^2 \le 4\widetilde{k}^2A_0^2A^{2J}\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\|^2.$$

Далі використовуємо нерівність (35) для отримання остаточних нерівностей

$$\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2 \le \frac{8A_0^2A^{2J}C_5'^2(r_2)}{\varepsilon^2A_{\min}^2}\widetilde{k}^{4+2r_1+2r_2}\|\widehat{\varphi}(k)\|^2,$$

$$\Big|\frac{du_k(t)}{dt}\Big|^2 \le \frac{4A_0^2A^{2J}C_5'^2(r_2)}{\varepsilon^2}\widetilde{k}^{4+2r_1+2r_2}\|\widehat{\varphi}(k)\|^2.$$

Із формул (8) та (35) випливає нерівність

$$\max_{t\in[0,T]}\Big(|u_0(t)|^2, \Big|\frac{du_0(t)}{dt}\Big|^2\Big) \le \frac{2+T^2}{\varepsilon^2}\,C_5'^2(r_2)\|\widehat{\varphi}(0)\|^2.$$

За умови теореми функції $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_p)$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_p)$, тому відповідні ряди для розв'язку $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2$ та його похідної $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|du_k(t)/dt|^2$ є збіжними для усіх чисел $t\in[0,T]$ разом із рядом $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{4+2r_1+2r_2}\|\widehat{\varphi}(k)\|^2$.

Це означає, що розв'язок задачі (1), (2) для усіх $t\in[0,T]$ приймає значення у просторі $\mathbf{H}_1(\Omega_p)$, його похідна за t приймає значення у просторі $\mathbf{H}_0(\Omega_p)$, а також виконуються оцінки (36). ■

Введемо оператори $(1-\Delta)^q$ та $\sqrt{-\Delta}$, які діють на функцію $\eta = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\eta}(k)e^{ikx}$ згідно з формулами

$$(1-\Delta)^q\eta = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q}\widehat{\eta}(k)e^{ikx},$$
$$\sqrt{-\Delta}\,\eta = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \|k\|\widehat{\eta}(k)e^{ikx}.$$

Наслідок 1. Нехай $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q+r_1+r_2+1}(\Omega_p)$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{q+r_1+r_2+1}(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, та виконуються інші умови теореми 2, тоді існує єдиний розв'язок $u = u(t,x)$ задачі (1), (2), причому $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)$ для усіх векторів α із множини $\mathcal{O}^2 \setminus B_\varepsilon$ і виконуються нерівності

$$\varepsilon\cdot\|u(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}_q(\Omega_p)} \le C_5\,\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{q+r_1+r_2+1}(\Omega_p)},$$
$$\varepsilon\cdot\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\Big\|_{\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)} \le C_5\,\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{q+r_1+r_2+1}(\Omega_p)}.$$

□ *Доведення.* Функції $(1-\Delta)^{q-1}\varphi_1$ та $(1-\Delta)^{q-1}\varphi_2$ належать до простору $\mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_p)$, тому на підставі теореми 2 маємо, що існує єдиний розв'язок v задачі (1), (2) із правими частинами $(1-\Delta)^{q-1}\varphi_1$ та $(1-\Delta)^{q-1}\varphi_2$ в умовах (2) і $v(t,\cdot) \in \mathbf{H}_1(\Omega_p)$, $\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_0(\Omega_p)$ Звідси та з нерівності (36) випливає твердження наслідку. Розв'язок u задачі (1), (2) визначається за формулою $u = (1-\Delta)^{1-q}v$. ■

Наслідок 2. Для розв'язку $u = u(t,x)$ задачі (1), (2) справджується також оцінка

$$a^2(t)\|\sqrt{-\Delta}u(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)} + \\ + \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\Big\|_{\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)} \le \frac{1}{\varepsilon}C_5\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{q+r_1+r_2+1}(\Omega_p)}.$$

□ *Доведення.* Шукану оцінку отримаємо на основі нерівностей (22), (35) та наслідку 1. ■

Зауваження 1. В умовах теореми 2 розв'язок задачі (1), (2) існує не лише в області $\mathcal{O}^2 \setminus B_\varepsilon$, але і в ширшій області $\mathcal{O}^2 \setminus B$, де meas B = 0, проте для вектора $\alpha \in B_\varepsilon \setminus B$ взагалі не виконується оцінка (36), а виконуються слабші оцінки

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}_1(\Omega_p)} \le C_6\,\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_p)},$$
$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\Big\|_{\mathbf{H}_0(\Omega_p)} \le C_7\,\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_p)},$$

де сталі C_6 і C_7 не залежать від φ, але залежать від вектора α і є необмеженими на множині $B_\varepsilon \setminus B$.

Висновки

Нелокальна задача (1), (2) з інтегральними умовами для рівняння коливання струни зі змінним коефіцієнтом розв'язна у просторах Соболєва скінченного порядку для усіх параметрів $\alpha \in \mathcal{O}^2$ (за винятком деяких множин малої міри), якщо виконується умова (28). Існування розв'язку у просторах Соболєва випливає із строгої гіперболічності рівняння (1), що дає можливість звести його до зліченної кількості систем звичайних диференціальних рівнянь (9) і встановити відповідні оцінки фундаментальних матриць таких систем.

Для негіперболічних рівнянь згадані оцінки матриць можуть бути експоненціальними, тому розв'язки задач з інтегральними умовами для таких рівнянь, взагалі, не належать шкалі просторів Соболєва.

Встановлення існування та побудова розв'язку задачі (1), (2) пов'язані з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої використано метричний підхід. Також застосовано зображення функцій в інтегральних умовах (2) за допомогою ізоморфізму між простором $\mathbf{L}_1(0,T)$ і декартовим добутком $\mathbb{R}\times\mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$.

В аналогічний спосіб можна дослідити задачі з інтегральними умовами для довільного строго гіперболічного рівняння другого порядку, а також для строго гіперболічних рівнянь вищих порядків.

Література

[1] Виленц И.Л. Классы единственности решения общей краевой задачи в слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных// Докл. АН УССР. Сер. А. – 1974. – № 3. – С. 195–197.

[2] Іванчов М.І. Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності// Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.

[3] Іванчов М.І. Задача теплопровідності з вільною межею, яка вироджується у початковий момент часу// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 82–87.

[4] Симотюк М.М., Медвідь О.М. Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 92–101.

[5] Симотюк М.М., Медвідь О.М. Задача з розділеними даними для рівнянь із частинними похідними// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 155–159.

[6] Фардигола Л.В. Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.

[7] Фардигола Л.В. Свойства T-устойчивости интегральной краевой задачи в слое // Теория функ.,

функц. анализ и их прилож. – 1991. – № 55. – С. 78–80.

[8] Фардигола Л.В. Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 51–58.

[9] Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type // Math. studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 48, – 238 p.

[10] Ільків В.С. Крайова задача з нелокальними двоточковими умовами для гіперболічного рівняння другого порядку// Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка". „Фіз.-мат. науки." – 2006. – № 566. – С. 41–51.

[11] Ільків В.С., Магеровська Т.В. Крайова задача з нелокальними багатоточковими умовами для гіперболічного рівняння// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 66–81.

[12] Ільків В.С., Пташник Б.Й. Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників// Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624–1650.

[13] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[14] Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[15] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Ин-т компьют. исслед., 2002. – 384 с.

THE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

V.S. Il'kiv[a], T.V. Maherovska[b]

[a] *National University "Lvivska Politechnika"*
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine
[b] *Lviv State University of Internal Affairs*
26 Horodots'ka Str., 79007, Lviv, Ukraine

In domain, which is a Cartesian product of segment $[0,T]$ and p-dimensional torus Ω_p, the nonlocal problem with common integral conditions for strong hyperbolic (wave) equation $u_{tt} = a^2\Delta u$, where $a = a(t) > 0$ – continuously differentiable on segment $[0,T]$ function, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{p} \partial^2/\partial x_j^2$ – Laplace operator, are investigated.

Problem is incorrect by Hadamard and connect with problem of small denominators. By using of metric approach and isomorphism of space, the theorem about vlower estimation of small denominators was proved. As a remet of such estimation the existence anduniqueness conditions of problem solution in Sobolev space of periodic by variance $x_1, \ldots, x_n$ functions, were obtained.

Keywords: partial differential equation, integral condition, Sobolev spaces, small denominators.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.946