

МАГНІТНО-МЕХАНІЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА АСИНХРОННОГО ДВИГУНА З УРАХУВАННЯМ СКОСУ ПАЗІВ

О Гладкий В.М., 2012

Опрацьовано магнітно-механічну характеристику асинхронного двигуна з урахуванням скосу пазів ротора. Рівняння характеристики ґрунтуються на розрахунку одновимірного магнітного поля з урахуванням вищих просторових гармонік магніторушійних сил та насичення основного магнітного кола. Алгебризація рівнянь за просторовою координатою здійснюється за методом тригонометричної колокації.

Ключові слова: асинхронний двигун, магнітно-механічна характеристика, скіс пазів ротора, насичення основного магнітного кола, вищі гармоніки МРС.

A magnetic-mechanical characteristic for asynchronous motor taking into account rotor teeth skew has been developed. The equations are based on magnetic field computation allowing for core saturation and magnetomotive forces spatial harmonics. The trigonometric collocation method is used to algebrization of equations.

Key words: asynchronous motor, magnetic-mechanical characteristic, rotor tooth skew, core saturation, MMF spatial harmonics.

Постановка проблеми

Асинхронні двигуни є основними споживачами електричної енергії у промисловості, сільському господарстві і їх широко використовують для приводу більшості промислових механізмів, тому дослідженню процесів в асинхронних двигунах за допомогою математичного моделювання моделей завжди приділяли значну увагу.

Як відомо, в асинхронних двигунах пази ротора скошують на одну зубцеву поділку. Таким чином зменшується шкідливий вплив вищих гармонік на криву моменту, зменшуються електромагнітні вібрації і шуми, зменшуються синхронні моменти.

Хоча скіс пазів є доволі поширеним, дослідженню його впливу на роботу машини та її параметри приділяється недостатньо уваги.

Аналіз останніх досліджень

Проведений аналіз літератури свідчить, що врахуванню скосу пазів ротора на поведінку асинхронної машини у перехідних процесах практично не приділяється увага [1], а більшість статей присвячена врахуванню додаткових втрат чи поперечних струмів ротора [5].

Задачі досліджень

Завданням цього дослідження є створення магнітно-механічної характеристики [3] асинхронного двигуна зі скосом пазів ротора як сукупності рівнянь та формул, які для заданих струмів та кута повороту ротора дозволять обчислити потокозчеплення фаз статора і ротора та електромагнітний момент з урахуванням насичення основного магнітного кола та вищих просторових гармонік магніторушійних сил у їхньому взаємозв'язку.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо асинхронний двигун з клітковим ротором, на статорі якого розміщено s обмоток, розподілених по пазах довільно, а ротор має r стрижнів, скошених на одну зубцеву поділку t_{zp} .

Для записування магнітно-механічної характеристики такого двигуна приймемо допущення:

- 1) гістерезис і вихрові струми відсутні;
- 2) магнітне поле плоскопаралельне;
- 3) магнітне поле машини розділене на робоче поле й поля розсіяння, причому останні вважаються лінійними однорідними функціями струмів обмоток;
- 4) магнітні поля в ярах статора й ротора мають лише тангенціальну складову;
- 5) зубцеві шари статора і ротора замінені еквівалентними шарами, які у радіальному напрямі мають характеристику намагнічування, еквівалентну до реального зубцевого шару, а в тангенціальному напрямі – нескінченний магнітний опір;
- 6) обмотки статора й ротора замінені винесеними до повітряного проміжку нескінченно тонкими шарами й представлені кутовими розподілами густин провідників відповідних фаз.

Перетнемо магнітопровід машини m площинами, перпендикулярними до осі обертання ротора, вважаючи незмінним розподіл поля в осьовому напрямку поміж двома сусідніми площинами.

Згідно з прийнятими допущеннями рівняння, які описують розподіл магнітного поля при заданих струмах статора й ротора та куті повороту ротора для i -го перетину ($i = 1, \dots, m$), мають вигляд [4]:

$$\begin{aligned} \frac{dF_i}{d\alpha_M} - \frac{r_c}{p_M} H_{ci} + \frac{r_p}{p_M} H_{pi} + \dot{n}_{ct}(\alpha_M) \dot{i}_c / a_c + \dot{n}_{pti}(\beta_{Mi}) \dot{i}_p / a_p = 0; \\ \frac{r_c}{p_M} \int_0^{2\pi} H_{ci} d\alpha_M - \int_0^{2\pi} \dot{n}_{ct}(\alpha_M) \dot{i}_c d\alpha_M / a_c - \int_0^{2\pi} \dot{n}_{pti}(\beta_{Mi}) \dot{i}_p d\alpha_M / a_p = 0; \\ B_{\delta i} = \frac{1}{c_c} \frac{dB_{ci}}{d\alpha_M}; \quad B_{pi} = B_{ni} - c B_{ci}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\beta_{Mi} = \alpha_M - p_M \gamma + \frac{t_{zp}}{m} (i-1);$$

$$F_i = F_i(B_{\delta i}); \quad H_{ci} = H_{ci}(B_{ci}); \quad H_{pi} = H_{pi}(B_{pi}),$$

де $\dot{i}_c = [i_{c1} \dots i_{cs}]_T$; $\dot{i}_p = [i_{p1} \dots i_{pr}]_T$ – вектор струмів фаз статора й ротора відповідно; $\dot{n}_c(\alpha_M) = [n_{c1}(\alpha_M) \mathbf{K} n_{cs}(\alpha_M)]_T$; $\dot{n}_{pi}(\beta_{Mi}) = [n_{p1,i}(\beta_{Mi}) \mathbf{K} n_{pr,i}(\beta_{Mi})]_T$ – вектор кутових густин провідників фаз статора й ротора відповідно в i -му перетині (тут i надалі нижній індекс „ i ” вказуватиме на належність величини до i -го перетину вздовж осі машини; a_c , a_p – відповідно кількості паралельних гілок фаз статора й ротора; α_M – магнітний кут нахилу променя, який проходить через вісь обертання машини й довільну точку A на розточці статора, до прийнятого нерухомого відносно статора променя OX_c ; β_{Mi} – магнітний кут нахилу променя, який проходить через вісь обертання машини й точку A , до прийнятого нерухомого відносно ротора променя OX_p ; $p_M \gamma$ – магнітний кут нахилу променя OX_p до променя OX_c , який ототожнюємо з магнітним кутом повороту машини; p_M – кількість періодів магнітного поля вздовж розточки статора машини; B_{ci} , B_{pi} , H_{ci} , H_{pi} – магнітні індукції та напруженості магнітного поля в ярах статора й ротора відповідно; $B_{\delta i}$ – магнітна індукція в повітряному проміжку; F_i – магнітна напруга еквівалентного шару; B_{ni} – деяка магнітна індукція, що не залежить від координати α_M ; k_δ – коефіцієнт Картера; r_c – радіус кола, що проходить через середину яра статора; r_p – радіус кола, що проходить через середину яра ротора; c , c_c – постійні коефіцієнти, які обчислюють за формулами

$c = h_c l_c k_c / (h_p l_p k_p)$, $c_c = \frac{l_\delta r_\delta}{p_m h_c l_c k_c}$, у яких h_c – висота ярма статора; h_p – висота ярма ротора; l_c – довжина осердя статора; l_p – довжина осердя ротора; k_c – коефіцієнт заповнення сталі статора; k_p – коефіцієнт заповнення сталі ротора, r_δ – радіус кола, яке проходить через середину повітряного проміжку, l_δ – розрахункова довжина машини.

Нижній індекс „r” тут і надалі означає транспонування.

Доповнимо (1) формулами для обчислення потокозчеплень та електромагнітного моменту двигуна [4]

$$\mathbf{\Psi}_c = L_{\sigma c} \mathbf{i}_c + \frac{r_\delta}{p_m c_c a_c} \int_0^{l_\delta} \int_0^{2\pi} \mathbf{n}_c(\alpha_m) B_c d\alpha_m dl_\delta; \quad (2)$$

$$\mathbf{\Psi}_p = L_{\sigma p} \mathbf{i}_p + \frac{r_\delta}{p_m c_p a_p} \int_0^{l_\delta} \int_0^{2\pi} \mathbf{n}_p(\beta_m) B_c d\alpha_m dl_\delta;$$

$$M = -\frac{p_m r_\delta}{a_c} \int_0^{l_\delta} \int_0^{2\pi} \mathbf{i}_{ct} \mathbf{n}_c(\alpha_m) B_\delta d\alpha_m dl_\delta, \quad (3)$$

де

$$L_{\sigma c} = \begin{bmatrix} L_{\sigma c1c1} & \mathbf{K} & L_{\sigma c1cs} \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ L_{\sigma csc1} & \mathbf{K} & L_{\sigma cscs} \end{bmatrix}; \quad L_{\sigma p} = \begin{bmatrix} L_{\sigma p1p1} & \mathbf{K} & L_{\sigma p1pr} \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ L_{\sigma prp1} & \mathbf{K} & L_{\sigma prpr} \end{bmatrix}$$

– стала матриця індуктивностей розсіювання фаз статора й ротора відповідно; $\mathbf{\Psi}_c = [\Psi_{c1} \dots \Psi_{cs}]_T$; $\mathbf{\Psi}_p = [\Psi_{p1} \dots \Psi_{pr}]_T$ – вектори потокозчеплень фаз статора й ротора відповідно.

Система рівнянь (1) являє собою двоточкову диференціальну крайову задачу розрахунку магнітного поля в асинхронному двигуні, у якій невідомі B_{ci} , H_{ci} , B_{pi} , H_{pi} , $B_{\delta i}$, F_i задовольняють крайову умову

$$B_{ci}(\alpha_m) = B_{ci}(\alpha_m + 2\pi); H_{ci}(\alpha_m) = H_{ci}(\alpha_m + 2\pi); B_{pi}(\alpha_m) = B_{pi}(\alpha_m + 2\pi);$$

$$H_{pi}(\alpha_m) = H_{pi}(\alpha_m + 2\pi); B_{\delta i}(\alpha_m) = B_{\delta i}(\alpha_m + 2\pi); F_i(\alpha_m) = F_i(\alpha_m + 2\pi)$$

Розв’язуватимемо систему рівнянь (1) – (3) методом тригонометричної колокації [2], у якому алгебрзація рівнянь зводиться до формальної заміни усіх функцій аргументу α_m векторами їх дискрет (тобто значеннями функції у вузлах накладеної вздовж періоду магнітного поля сітки з $N = 1 + 2n$ вузлами, де n – ціле число), диференційного оператора $\frac{d}{d\alpha_m}$ – його дискретним аналогом

$$D = \frac{2}{N} \begin{bmatrix} \sum_{v=1}^n v \sin(v(\alpha_{m1} - \alpha_{m1})) & \dots & \sum_{v=1}^n v \sin(v(\alpha_{m1} - \alpha_{mN})) \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ \sum_{v=1}^n v \sin(v(\alpha_{mN} - \alpha_{m1})) & \dots & \sum_{v=1}^n v \sin(v(\alpha_{mN} - \alpha_{mN})) \end{bmatrix},$$

а інтегрального оператора $\int_0^{2\pi} d\alpha_m$ – його алгебричним аналогом $\mathbf{I}_G = \frac{2\pi}{N} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{K} & \mathbf{1} \\ \mathbf{N} & & \mathbf{N} \end{bmatrix}$.

Застосувавши ці правила до системи рівнянь (1)–(3), отримуємо її дискретний аналог у вигляді нелінійної системи алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\mathbf{F}_{\text{дi}} - \frac{r_c}{p_m} \mathbf{H}_{\text{сдi}} + \frac{r_p}{p_m} \mathbf{H}_{\text{рдi}} + n_{\text{сдт}} \mathbf{i}_c / a_c + n_{\text{рдтi}} \mathbf{i}_p / a_p = 0; \\
\mathbf{I}_G \left(\frac{r_c}{p_m} \mathbf{H}_{\text{сдi}} - n_{\text{сдт}} \mathbf{i}_c / a_c - n_{\text{рдтi}} \mathbf{i}_p / a_p \right) = 0; \\
\mathbf{B}_{\delta\text{дi}} = \frac{1}{c_c} \mathbf{D}\mathbf{B}_{\text{сдi}}; \quad \mathbf{B}_{\text{рдi}} = c_1 \mathbf{B}_{\text{пi}} - c \mathbf{B}_{\text{сдi}}; \\
\mathbf{\beta}_{\text{мдi}} = \mathbf{\alpha}_{\text{мдi}} - c_1 \left(p_m \gamma - \frac{t_{\text{зп}}}{m} (i-1) \right) \\
\mathbf{F}_{\text{дi}} = \mathbf{F}_{\text{дi}}(\mathbf{B}_{\delta\text{дi}}); \quad \mathbf{H}_{\text{сдi}} = \mathbf{H}_{\text{сдi}}(\mathbf{B}_{\text{сдi}}); \quad \mathbf{H}_{\text{рдi}} = \mathbf{H}_{\text{рдi}}(\mathbf{B}_{\text{рдi}}),
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi}_c = L_{\text{сc}} \mathbf{i}_c + \frac{2\pi}{N} \frac{r_\delta}{p_m c_c a_c} \int_0^{l_\delta} n_{\text{сд}} \mathbf{B}_{\text{сд}} dl_\delta; \quad \mathbf{\Psi}_p = L_{\text{ср}} \mathbf{i}_p + \frac{2\pi}{N} \frac{r_\delta}{p_m c_p a_p} \int_0^{l_\delta} n_{\text{рд}} \mathbf{B}_{\text{сд}} dl_\delta; \\
\mathbf{M} = -\frac{2\pi}{N} \frac{p_m r_\delta}{a_c} \int_0^{l_\delta} \mathbf{i}_{\text{ст}} n_{\text{сд}} \mathbf{B}_{\delta\text{д}} dl_\delta,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi}_c = L_{\text{сc}} \mathbf{i}_c + \frac{2\pi}{N} \frac{r_\delta}{p_m c_c a_c} \int_0^{l_\delta} n_{\text{сд}} \mathbf{B}_{\text{сд}} dl_\delta; \quad \mathbf{\Psi}_p = L_{\text{ср}} \mathbf{i}_p + \frac{2\pi}{N} \frac{r_\delta}{p_m c_p a_p} \int_0^{l_\delta} n_{\text{рд}} \mathbf{B}_{\text{сд}} dl_\delta; \\
\mathbf{M} = -\frac{2\pi}{N} \frac{p_m r_\delta}{a_c} \int_0^{l_\delta} \mathbf{i}_{\text{ст}} n_{\text{сд}} \mathbf{B}_{\delta\text{д}} dl_\delta,
\end{aligned} \tag{6}$$

де

$$n_{\text{сд}} = \begin{bmatrix} n_{\text{с1,д1}} & \mathbf{K} & n_{\text{с1,дN}} \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ n_{\text{сs,д1}} & \mathbf{K} & n_{\text{сs,дN}} \end{bmatrix}; \quad n_{\text{рд}} = \begin{bmatrix} n_{\text{р1,д1}} & \mathbf{K} & n_{\text{р1,дN}} \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ n_{\text{рr,д1}} & \mathbf{K} & n_{\text{рr,дN}} \end{bmatrix}$$

– матриця дискрет кутових густин провідників фаз статора й ротора відповідно;
 $\mathbf{F}_{\text{дi}} = [F_{1,i} \dots F_{N,i}]_{\text{T}}$ – вектор дискрет відповідно магнітної напруги еквівалентного шару;
 $\mathbf{B}_{\delta\text{дi}} = [B_{\delta 1,i} \dots B_{\delta N,i}]_{\text{T}}$ – вектор дискрет магнітної індукції в повітряному проміжку;
 $\mathbf{B}_{\text{сдi}} = [B_{\text{с1,i}} \dots B_{\text{сN,i}}]_{\text{T}}$, $\mathbf{B}_{\text{рдi}} = [B_{\text{р1,i}} \dots B_{\text{рN,i}}]_{\text{T}}$ – вектор дискрет відповідно магнітної індукції ярма статора та магнітної індукції ярма ротора;
 $\mathbf{H}_{\text{сдi}} = [H_{\text{с1,i}} \dots H_{\text{сN,i}}]_{\text{T}}$, $\mathbf{H}_{\text{рдi}} = [H_{\text{р1,i}} \dots H_{\text{рN,i}}]_{\text{T}}$ – вектор дискрет відповідно напруженості магнітного поля в ярмі статора та напруженості магнітного поля в ярмі ротора;
 $\mathbf{c}_1 = [1 \quad \mathbf{K} \quad 1]_{\text{T}}$ – матриця-стовпець розміру N;
 $\mathbf{\alpha}_{\text{мд}} = [\alpha_{\text{м1}} \quad \mathbf{K} \quad \alpha_{\text{мN}}]_{\text{T}}$ – стовпець дискрет кутової координати α_m накладеної вздовж періоду магнітного поля сітки;
 $\mathbf{\beta}_{\text{мд}} = [\beta_{\text{м1}} \quad \mathbf{K} \quad \beta_{\text{мN}}]_{\text{T}}$ – стовпець дискрет кутової координати β_m .

Утворивши такі матриці та вектори:

$\mathbf{D}_t = \text{diag}(D, D, \dots, D)$ – діагональна матриця розміру mN ; $\mathbf{F}_{\text{дт}} = [\mathbf{F}_{\text{д1}} \dots \mathbf{F}_{\text{дm}}]_{\text{T}}$ – вектор дискрет магнітної напруги еквівалентного шару в усіх перетинах вздовж довжини машини;
 $\mathbf{H}_{\text{сдт}} = [\mathbf{H}_{\text{сд1}} \dots \mathbf{H}_{\text{сдm}}]_{\text{T}}$ – вектор дискрет напруженості магнітного поля у ярмі статора в усіх перетинах вздовж довжини машини;
 $\mathbf{H}_{\text{рдт}} = [\mathbf{H}_{\text{рд1}} \dots \mathbf{H}_{\text{рдm}}]_{\text{T}}$ – вектор дискрет напруженості магнітного поля у ярмі ротора в усіх перетинах вздовж довжини машини;
 $n_{\text{сдт}} = [n_{\text{сд}} \dots n_{\text{сд}}]$ – матриця, яка містить m матриць $n_{\text{сд}}$; $n_{\text{рдт}} = [n_{\text{рд1}} \dots n_{\text{рдm}}]$ – матриця, яка містить m матриць $n_{\text{рд}}$;

$\dot{\mathbf{I}}_{Gt} = \text{diag}(\dot{\mathbf{I}}_G, \dot{\mathbf{I}}_G, \dots, \dot{\mathbf{I}}_G)$ – діагональна матриця розміру m ; $\dot{\mathbf{B}}_{\delta dt} = [\dot{\mathbf{B}}_{\delta d1} \dots \dot{\mathbf{B}}_{\delta dm}]_T$ – вектор дискрет магнітної індукції в повітряному проміжку в усіх перетинах вздовж довжини машини; $\dot{\mathbf{B}}_{сдt} = [\dot{\mathbf{B}}_{сд1} \dots \dot{\mathbf{B}}_{сдm}]_T$ – вектор дискрет магнітної індукції в ярмі статора в усіх перетинах вздовж довжини машини; $\dot{\mathbf{B}}_{рdт} = [\dot{\mathbf{B}}_{рd1} \dots \dot{\mathbf{B}}_{рdм}]_T$ – вектор дискрет магнітної індукції в ярмі ротора в усіх перетинах вздовж довжини машини; $\dot{\mathbf{B}}_{пт} = [\dot{\mathbf{B}}_{п1} \dots \dot{\mathbf{B}}_{пm}]_T$ – вектор магнітної індукції $\mathbf{B}_{пт}$ в усіх перетинах вздовж довжини машини; $\dot{\mathbf{c}}_{1t} = [\dot{\mathbf{c}}_1 \quad \mathbf{K} \quad \dot{\mathbf{c}}_1]_T$ – матриця-стовпець розміру Nm ; $\dot{\alpha}_{мdт} = [\dot{\alpha}_{мd1} \dots \dot{\alpha}_{мdт}]_T$ – вектор дискрет кутової координати α_m в усіх перетинах; $\dot{\beta}_{мdт} = [\dot{\beta}_{мd1} \dots \dot{\beta}_{мdм}]_T$ – вектор дискрет кутової координати β_m в усіх перетинах, та обчисливши інтеграли у (5), (6) за формулою прямокутників, отримуємо магнітно-механічну характеристику асинхронного двигуна з урахуванням скосу пазів у векторному вигляді

$$\begin{aligned}
 D_t \dot{\mathbf{F}}_{dt} - \frac{r_c}{p_m} \dot{\mathbf{H}}_{сдt} + \frac{r_p}{p_m} \dot{\mathbf{H}}_{рdт} + n_{сдт} \dot{\mathbf{i}}_c / a_c + n_{рdт} \dot{\mathbf{i}}_p / a_p &= 0; \\
 \dot{\mathbf{I}}_{Gt} \left(\frac{r_c}{p_m} \dot{\mathbf{H}}_{сдt} - n_{сдт} \dot{\mathbf{i}}_c / a_c - n_{рdт} \dot{\mathbf{i}}_p / a_p \right) &= 0; \\
 \dot{\mathbf{B}}_{\delta dt} &= \frac{1}{c_c} D_t \dot{\mathbf{B}}_{сдt}; \quad \dot{\mathbf{B}}_{рdт} = \dot{\mathbf{c}}_{1t} \mathbf{B}_{пт} - c \dot{\mathbf{B}}_{сдt};
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_{мdт} &= \dot{\alpha}_{мdт} - \dot{\mathbf{c}}_{1t} (p_m \gamma - \frac{t_{zp}}{m} (i-1)) \\
 \dot{\mathbf{F}}_{dt} &= \dot{\mathbf{F}}_{dt}(\dot{\mathbf{B}}_{\delta dt}); \quad \dot{\mathbf{H}}_{сдt} = \dot{\mathbf{H}}_{сдt}(\dot{\mathbf{B}}_{сдt}); \quad \dot{\mathbf{H}}_{рdт} = \dot{\mathbf{H}}_{рdт}(\dot{\mathbf{B}}_{рdт}),
 \end{aligned}$$

$$\dot{\Psi}_c = L_{\sigma c} \dot{\mathbf{i}}_c + \frac{2\pi}{N} \frac{r_\delta}{p_m c_c a_c} \frac{l_\delta}{m} n_{сдt} \dot{\mathbf{B}}_{сдt}; \quad \dot{\Psi}_p = L_{\sigma p} \dot{\mathbf{i}}_p + \frac{2\pi}{N} \frac{r_\delta}{p_m c_p a_p} \frac{l_\delta}{m} n_{рdт} \dot{\mathbf{B}}_{сдt}; \tag{8}$$

$$M = -\frac{2\pi}{N} \frac{p_m r_\delta}{a_c} \frac{l_\delta}{m} \dot{\mathbf{i}}_{сt} n_{сдt} \dot{\mathbf{B}}_{\delta dt} \tag{9}$$

яка для заданих струмів фаз статора і ротора та куті повороту ротора дозволяє обчислити розподіл магнітного поля з урахуванням скосу пазів ротора та потокозчеплення і момент двигуна.

Висновки

Опрацьовану магнітно-механічну характеристику асинхронного двигуна з урахуванням скосу пазів ротора можна використовувати як складову частину математичної моделі асинхронного двигуна з урахуванням насичення основного магнітного кола, вищих просторових гармонік магніторушійних сил обмоток та скосу пазів ротора у їхньому взаємозв'язку.

1. Капустин Г.В., Финкельштейн Б.В. Математическая модель и схема замещения насыщенной асинхронной машины со скосом пазов // *Технічна електродинаміка*. – 1998. – № 5. – С. 54–59.
2. Фильц Р.В. Дискретные аналоги дифференциальных операторов и их применение в задачах электромеханики // *Изв. вузов. Электромеханика*. – 1990. – № 3. – С. 5–11.
3. Фильц Р.В. Магнитно-механические параметры электромеханических преобразователей энергии // *Изв. вузов. Электромеханика*. – 1988. – № 12. – С. 18–22.
4. Фильц Р. В. Математические основы теории электромеханических преобразователей. – К.: Наук. думка, 1979. – 208 с.
5. Zhao HaiSen, Liu XiaoFang, Chen WeiHua, Peter Baldassari. Time-stepping finite element analysis on the influence of skewed rotors and different skew angels on the losses of squirrel-cage asynchronous motors // *Science China. Technological sciences*. – 2011. – Vol. 54. – P. 2511–2519.