

## МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ДИФЕРЕНЦІЙНИМ ГАРМОНІЧНИМ МЕТОДОМ

ã Глухівський Л.Й., 2012

**Розглянуто можливість використання диференційного гармонічного методу для чисельного розрахунку перехідних процесів у нелінійних електричних колах з періодичними електрорушійними силами, з метою прискорення моделювання.**

*Ключові слова: нелінійні електричні кола, перехідні процеси, диференційний гармонічний метод, прискорення моделювання.*

**In the article possibility of the use of differential harmonic method is considered for the numeral calculation of transients in nonlinear electric circles with periodic electromotive forces, with the purpose of acceleration of simulation.**

*Key words: nonlinear electric circles, transients, differential harmonic method, acceleration of simulation.*

### Вступ

Досліджуючи різноманітні процеси у електричних колах і електротехнічних пристроях шляхом їх математичного моделювання, найчастіше розв'язують задачу виокремлення у явному вигляді із математичної моделі, представлені диференціальними рівняннями (ДР), зв'язків між координатами модельованого процесу. Якщо однією із координат є час і вона вважається незалежною змінною, то залежності від неї всіх інших координат відображають у явному вигляді модельований перехідний процес.

В окремих і дуже нечастих випадках (зокрема, за наявності у модельованому колі чи пристрої лише лінійних зв'язків) залежності координат процесу від часу вдається виразити аналітично – у квадратурах, тобто за допомогою елементарних функцій і інтегралів від них. У всіх інших випадках ці залежності встановлюють чисельно – наближеними значеннями координат у вигляді таблиць.

Якщо процес у колі чи пристрої описується системою ДР високого порядку і до цього ще й враховуються різноманітні складні фактори (нелінійності, витіснення струму в масивних струмопроводах тощо), то це призводить до значного збільшення обсягу обчислень на кожному кроці інтегрування. Внаслідок цього динаміка процесу у чисельній моделі може бути повільнішою, ніж динаміка реального процесу (звичайно, з урахуванням швидкодії комп'ютера, на якому модель реалізується). Якщо результати моделювання використовують як дані для регулювання, то необхідно виконувати розрахунки у реальному часі. Традиційні чисельні методи інтегрування ДР не завжди задовольняють ці вимоги.

За наявності у нелінійних ДР, що представляють математичну модель електричного кола чи електротехнічного пристрою, періодичних вимушувальних сил прискорене отримання періодичних розв'язків цих рівнянь і моделювання описуваних ними періодичних процесів можливе з використанням диференційного гармонічного методу (ДГМ) [1, 2]. Метою цієї статті є вивчення можливості використання зазначеного методу для розрахунку перехідних процесів, зокрема з метою прискорення моделювання.

Основною ідеєю застосування ДГМ для розрахунку перехідних процесів є заміна змінних, яка дає можливість перейти від швидкозмінних миттєвих координат (напруг, струмів, потокозчеплень тощо) до координат, які змінюються у часі повільніше. Такими координатами є, зокрема, амплітуди гармонік миттєвих координат.

Як приклад використання подібної заміни швидкозмінних координат повільнозмінними можна навести класичну роботу [3], у якій описаний метод повільнозмінних амплітуд, запропонований ще у 1921 р. голландським фізиком Ван-дер-Поєм. Цей метод згодом був розвинутий іншими дослідниками, зокрема, на його основі був розроблений відомий асимптотичний метод Крилова – Боголюбова [4]. З його використанням періодичні розв'язки для квазілінійних систем з малим згасанням шукають як моногармонічні коливання, амплітуди яких є повільнозмінними функціями часу.

### Виклад способу дослідження

У ДГМ [1, 2] заміна змінних при пошуку періодичного розв'язку ДР

$$\frac{dy}{dt} + z = e, \quad (1)$$

де  $y, z, e$  – скалярні чи векторні змінні, причому  $e$  –  $T$ -періодична змущувальна сила, виражається формулою

$$a = A_0 + \sum_{n=1}^n (A_{cn} \cos n\omega t + A_{sn} \sin n\omega t) \quad (2)$$

$$(a = y, z, e; \quad A = Y, Z, E; \quad \omega = 2\pi/T).$$

Вона призводить до перетворення ДР (1) до скінченного рівняння

$$\omega D \mathbf{Y}_\Gamma + \mathbf{Z}_\Gamma = \mathbf{E}_\Gamma, \quad (3)$$

у якому  $\mathbf{Y}_\Gamma, \mathbf{Z}_\Gamma, \mathbf{E}_\Gamma$  – вектори амплітуд вигляду

$$\mathbf{A}_\Gamma = \text{colon} (A_0, A_{c1}, A_{s1}, \dots, A_{cn}, A_{sn}) \quad (4)$$

і  $D$  – блочно-діагональна матриця

$$D = \text{diag} \left( 0, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{vmatrix} \right). \quad (5)$$

У періодичному режимі компоненти  $A_0, A_{c1}, A_{s1}, \dots, A_{cn}, A_{sn}$  векторів амплітуд (4), якими визначається періодичний розв'язок ДР (1), у часі є незмінними. У разі аналізу стійкості періодичного розв'язку ці компоненти необхідно прийняти змінними, і тоді ДР (1) з урахуванням (2) приводиться, як показано в [1, 2], не до скінченного рівняння, а до іншого ДР

$$\frac{d\mathbf{Y}_\Gamma}{dt} + \omega D \mathbf{Y}_\Gamma + \mathbf{Z}_\Gamma = \mathbf{E}_\Gamma. \quad (6)$$

Рівняння (6) можна застосовувати не тільки для аналізу стійкості періодичного розв'язку ДР (1), але й для розрахунку перехідного процесу. Якщо ДР (6) чисельно проінтегрувати, то знайдемо залежності від часу змінних  $A_0, A_{c1}, A_{s1}, \dots, A_{cn}, A_{sn}$ , за якими з використанням формули (2) можна отримати відшукувані наближені часові залежності миттєвих змінних.

Слід зазначити, що ДГМ [1, 2] – це чисельний метод, розроблений на базі методу гармонічного балансу, і він не базується на принципі суперпозиції: він враховує, що за наявності нелінійних зв'язків амплітуди гармонік усіх порядків залежних і незалежних змінних взаємозалежні.

З метою ілюстрації можливості розрахунку перехідного процесу із застосуванням ДГМ, оцінки точності результатів і міри прискорення розрахунку проведений чисельний експеримент, об'єктами якого обрано два простих кола: лінійне  $r - L$  коло (надалі його називатимемо – коло 1) і нелінійне  $r - L$  коло (надалі його називатимемо – коло 2) з таким же значенням активного опору  $r$ , але з нелінійною індуктивністю, початковий нахил кривої намагнічування якої відповідає значенню  $L$  кола 1 (рис. 1). Зазначимо, що ця крива намагнічування є умовною, не відповідає якійсь конкретній електротехнічній сталі, вважатимемо її кривою намагнічування деякого дроселя з повітряним

проміжком у магнітопроводі. Для цих двох кіл  $r = 1$  Ом, вони вмикаються на зовнішню ЕРС, яка є синусоїдальною з амплітудою  $E_m = 25$  В і круговою частотою  $\omega$ .

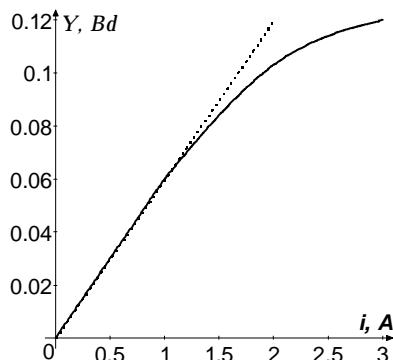


Рис. 1. Характеристики намагнічування

ДР вигляду (1), яке описує миттєві змінні (струм  $i$  і потокозчеплення  $\Psi$ ) кіл 1 і 2, має вигляд

$$\frac{d\Psi}{dt} + r i = E_m \sin \omega t, \quad (7)$$

при цьому для кола 1  $\Psi = Li$ , а для кола 2

$$\Psi = \Psi(i) \quad (8)$$

– нелінійна функція відповідно до заданої кривої намагнічування (на рис. 1 – суцільна крива).

ДР вигляду (6) для цих кіл є таким:

$$L_{\Gamma} \frac{d\mathbf{I}_{\Gamma}}{dt} + \omega D \mathbf{\Psi}_{\Gamma} + R_{\Gamma} \mathbf{I}_{\Gamma} = \mathbf{E}_{\Gamma}, \quad (9)$$

де

$$\mathbf{I}_{\Gamma} = \text{colon}(I_0, I_{c1}, I_{s1}, \dots, I_{cn}, I_{sn}); \quad (10a)$$

$$\mathbf{\Psi}_{\Gamma} = \text{colon}(\Psi_0, \Psi_{c1}, \Psi_{s1}, \dots, \Psi_{cn}, \Psi_{sn}); \quad (10b)$$

$$\mathbf{E}_{\Gamma} = \text{colon}(0, 0, E_m, 0, \dots, 0) \quad (10v)$$

– вектори вигляду (4);  $L_{\Gamma} = \frac{d\mathbf{\Psi}_{\Gamma}}{d\mathbf{I}_{\Gamma}}$  – матриця диференціальних гармонічних індуктивностей [1, 2],

вона є функцією вектора амплітуд  $\mathbf{I}_{\Gamma}$  (його функцією є також вектор амплітуд  $\mathbf{\Psi}_{\Gamma}$ );  $R_{\Gamma}$  – діагональна матриця з усіма однаковими елементами, які дорівнюють  $r$ .

Для лінійного кола 1 ДР (9) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} L \\ L \\ L \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_c \\ I_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega L \\ 0 & -\omega L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_c \\ I_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ r \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_c \\ I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Вибір кіл 1 і 2 для моделювання в описуваному чисельному експерименті зумовлений такими міркуваннями.

Перехідний процес для кола 1 має відоме аналітичне рішення, яке можна подати як залежність від часу вектора

$$\mathbf{I}_{\Gamma} = \text{colon}(I_0, I_c, I_s) \quad (12a)$$

зі змінною у часі нульовою компонентою

$$I_0 = -I_c^* \exp\left(-\frac{r}{L}t\right) \quad (12b)$$

і незмінними компонентами

$$I_c = I_c^* = -I_m \sin a; I_s = I_s^* = I_m \cos a, \quad (12в)$$

де

$$a = \arctg \frac{wL}{r}; I_m = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + (wL)^2}}. \quad (12г)$$

Наявність для кола 1 точного аналітичного розв'язку (12) використовуємо нижче з метою верифікації ДГМ-рівняння (11).

Під час експерименту для чисельного інтегрування ДР (7), (9) і (11) використано однокроковий метод Кутта-Мерсона четвертого порядку точності з автоматичним вибором кроку [5], який характерний наявністю формули для обчислення локальної похибки на кроці.

Чисельне інтегрування ДР для обидвох кіл і визначення необхідних кількостей кроків і їх довжин – максимальної, мінімальної і середньої – проводилося на проміжку часу у межах декількох перших періодів змушувальної сили, якою тут є зовнішня ЕРС  $e$ .

Під час чисельного інтегрування ДР (9) для кола 2 обчислення значень матриці  $L_{\Gamma}$  і вектора  $\dot{\Psi}_{\Gamma}$  за значеннями вектора  $\dot{I}_{\Gamma}$  виконувалися з використанням таблично заданої кривої намагнічування (8) і наведених в [1] комп'ютерних процедур, зокрема **SNCS, VGVS, VSVG, GRPAR, OMOV** (викладені алгоритмічною мовою Фортран-90).

Початкові умови при інтегрування ДР (7) є нульовими, а початкові умови для інтегрування ДР (9) і (11) необхідно попередньо визначати. Для інтегрування ДР (11), що описує лінійне коло 1, початкові умови візьмемо з відомого аналітичного розв'язку, представленого формулою (12): при  $t = 0$   $\dot{I}_{\Gamma} = \text{colon}(-I_c^*, I_c^*, I_s^*)$ . Початкові умови для інтегрування ДР (9), що описує нелінійне коло 2, є невідомими, і їх визначення виконувалося так. Проводилося чисельне інтегрування ДР (7) для кола 2 на перших двох періодах зміни ЕРС, отримані значення струму на цих першому і другому періодах розкладавалося чисельним методом у ряд Фур'є, із отриманих амплітуд гармонік формувалися значення вектора (10а)  $\dot{I}_{\Gamma(1)}$  для першого періоду і  $\dot{I}_{\Gamma(2)}$  для другого, за якими визначалося початкове значення  $\dot{I}_{\Gamma(0)}$  при  $t = 0$  за формулою

$$\dot{I}_{\Gamma(0)} = \dot{I}_{\Gamma(1)} + (\dot{I}_{\Gamma(1)} - \dot{I}_{\Gamma(2)})/3. \quad (13)$$

### Аналіз результатів

Перший етап чисельного експерименту – визначення необхідної кількості кроків і їх довжин під час чисельного інтегрування ДР (7) для кіл 1 і 2.

Найбільші і найменші значення максимально допустимого кроку і загальна кількість кроків під час чисельного інтегрування ДР (7) для кола 1 на перших 5 періодах зміни ЕРС отримано такими, як наведено у табл. 1. Під час інтегрування ДР (7) контролювалася абсолютна точність як різниця між отриманим за формулою (12) точним значенням струму і наближеним його значенням, отриманим чисельним інтегруванням. Тут і далі довжини кроків даються у відносних одиницях – по відношенню до довжини  $T$  періоду ЕРС.

Таблиця 1

Параметри кроків інтегрування для кола 1

Абсолютна точність, А	Частота $W$ , 1/с	Найменше значення кроку, в.о.	Найбільше значення кроку, в.о.	Кількість кроків на $5T$
0,001	100	0,088	0,209	40
	200	0,097	0,253	34
	300	0,107	0,253	31
	400	0,13	0,278	26
	500	0,107	0,306	27

Абсолютна точність, А	Частота $W$ , 1/с	Найменше значення кроку, в.о.	Найбільше значення кроку, в.о.	Кількість кроків на $5T$
0,005	100	0,13	0,306	27
	200	0,17	0,306	21
	300	0,16	0,306	20
	400	0,209	0,37	18
	500	0,157	0,407	18
0,01	100	0,173	0,336	21
	200	0,19	0,407	18
	300	0,19	0,448	16
	400	0,209	0,407	16
	500	0,209	0,542	12

Як видно із табл. 1, під час інтегрування ДР (7) для кола 1 крок змінювався у межах: для точності 0,001 – від 0,088 до 0,306; для точності 0,005 – від 0,13 до 0,407; для точності 0,01 – від 0,173 до 0,542.

Аналогічні дані для кола 2 наведені у табл. 2. Тільки тут під час інтегрування ДР (7) контролювалася не абсолютна точність, а локальна точність на кроці, оскільки для нелінійного випадку, на відміну від лінійного, точний аналітичний розв'язок відсутній.

Як видно із табл. 2, для кола 2 крок змінювався у межах: для точності 0,001 – від 0,0021 до 0,273; для точності 0,005 – від 0,0055 до 0,3; для точності 0,01 – від 0,014 до 0,44. Найбільшим крок фіксувався тільки на тих інтервалах часу, де струм переходить через нуль і змінюється щодо кривої намагнічування у її лінійних межах.

Таблиця 2

#### Параметри кроків інтегрування для кола 2

Локальна точність, А	Частота $W$ , 1/с	Найменше значення кроку, в.о.	Найбільше значення кроку, в.о.	Кількість кроків на $5T$
0,001	100	0,0023	0,205	141
	200	0,0023	0,248	150
	300	0,0025	0,248	190
	400	0,0034	0,273	226
	500	0,0021	0,273	279
0,005	100	0,0055	0,186	55
	200	0,0117	0,248	73
	300	0,0088	0,273	101
	400	0,0097	0,3	129
	500	0,008	0,3	156
0,01	100	0,014	0,205	37
	200	0,0229	0,273	52
	300	0,0229	0,33	72
	400	0,0304	0,44	83
	500	0,0189	0,363	107

Як бачимо, нелінійність призводить до істотного скорочення кроку чисельного інтегрування. По відношенню до кола 2 це є передбачуваним, адже максимальна довжина кроку визначається тим часовим інтервалом, на якому робоча формула методу апроксимує відшукувані залежності з необхідною точністю (робочі формули чисельних методів інтегрування отримані з використанням декількох перших членів ряду Тейлора). Чим ці залежності є «спокійнішими» на інтервалі кроку, тим більшою може бути його довжина. Нелінійність кола 2 робить зміну струму різкішою, з

гострішими піками, що й спричинює необхідність для дотримання заданої точності розв'язку зменшувати крок.

Отримані дані при чисельному інтегруванні ДР (7) для кіл 1 і 2 використано далі для порівняння з даними чисельного інтегрування ДГМ-рівнянь (9) і (11) для цих кіл.

Другий етап чисельного експерименту – аналогічні розрахунки перехідного процесу з використанням ДГМ.

Спочатку ДГМ застосований до кола 1 – для верифікації рівняння (11) як окремого виду рівняння (9). При цьому використана наявність його точного розв'язку (12) і точних значень початкових умов. Результати чисельного інтегрування рівняння (11) при  $W = 300$  1/с і заданій абсолютній точності 0,001 А наведені у табл. 3.

Таблиця 3

**Результати чисельного інтегрування ДР (11) для кола 1**

$t, c$	$I_0, A.$	$I_c, A.$	$I_s, A$	Відносний крок
0,0	1,385	-1,385	0,07692	2,200
0,04605	0,6282	-1,386	0,07336	0,459
0,05566	0,5362	-1,383	0,07715	0,532
0,0668	0,4472	-1,384	0,07792	0,564
0,07862	0,3664	-1,385	0,07874	0,532
0,08977	0,305	-1,385	0,07786	0,546
0,1012	0,2504	-1,386	0,07743	

Як бачимо із табл. 3, перший крок має довжину  $2,2T$ , а всі наступні кроки є в околиці  $0,5T$ . Перші 5 періодів зміни ЕРС пройдено за 6 кроків, і у середньому крок приблизно дорівнює періодові. Ці дані підтверджують, що амплітуди гармонік для лінійної задачі змінюються значно повільніше, ніж миттєвий струм, тобто їх можна вважати повільнозмінними. Результати інтегрування також підтверджують, що перехідний процес у колі точно описується ДГМ-рівнянням (11).

Завершується чисельний експеримент розрахунком перехідного процесу у колі 2 шляхом чисельного інтегрування ДГМ-рівняння (9). У табл. 4 наведені значення кількостей необхідних кроків для інтегрування ДР (9) при  $W = 300$  1/с і визначених за формулою (13) початкових умовах у межах перших 5 періодів при різних значеннях  $n$ .

Таблиця 4

**Кількість необхідних кроків для інтегрування ДР (9) для кола 2**

$n$	Кількість кроків		
	при точності 0,001 А	при точності 0,005 А	при точності 0,01 А
1	37	19	17
2	50	28	24
3	60	36	32
4	63	42	39
5	74	50	47

На рис. 2 суцільними лініями показані одержані шляхом інтегрування ДР (9) для кола 2 залежності від часу нульової складової  $I_0$  (верхня крива), 1-ї синусної  $I_{s1}$  (середня крива) і 1-ї косинусної  $I_{c1}$  (нижня крива) амплітуд. На цьому ж рисунку штрихові лінії показують зміни цих же величин для лінійного кола 1, відповідно до (12).

На рис. 3 показані розрахункові залежності косинусної  $I_{c2}$  (суцільна крива) і синусної  $I_{s2}$  (штрихова крива) амплітуд другої гармоніки.

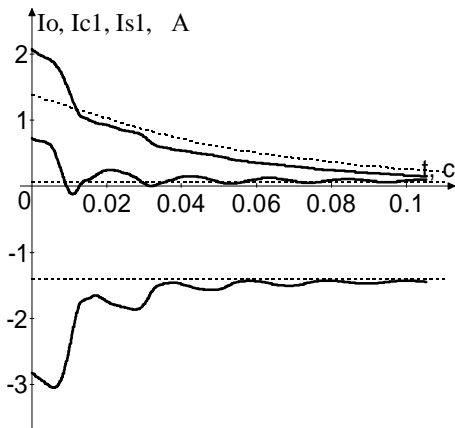


Рис. 2. Нульова складова амплітуди 1-ї гармоніки

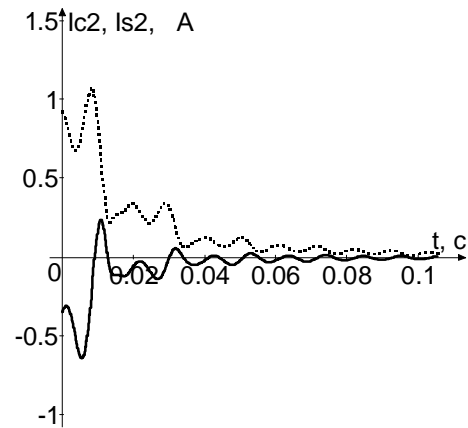


Рис. 3. Амплітуди 2-ї гармоніки

На рис. 4 показані розрахункові залежності амплітуд  $I_{c3}$  косинусної (суцільна крива) і синусної  $I_{s3}$  (штрихова крива) третьої гармоніки.

На рис. 5 показані розрахункові залежності амплітуд  $I_{c4}$  косинусної (суцільна крива) і синусної  $I_{s4}$  (штрихова крива) 4-ї гармоніки і на рис. 6 розрахункові залежності амплітуд  $I_{c5}$  косинусної (суцільна крива) і синусної  $I_{s5}$  (штрихова крива) 5-ї гармоніки.

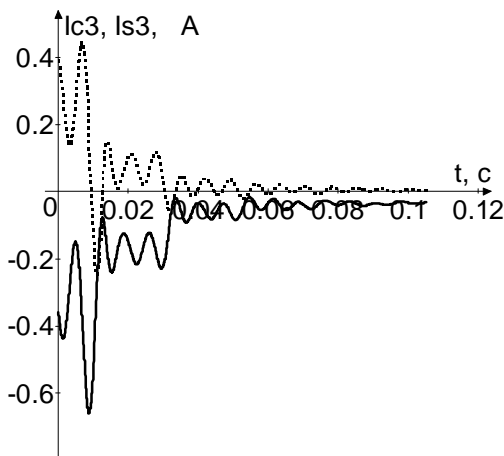


Рис. 4. Амплітуди 3-ї гармоніки

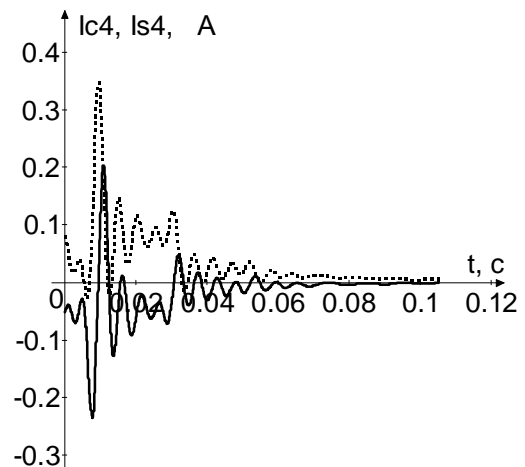


Рис. 5. Амплітуда 4-ї гармоніки

Порівняння кривих, зображених на рис. 2–6, показує, що з збільшенням порядку гармоніки залежності від часу її амплітуд стають все більше «розхристаними», швидкозмінними. Тому необхідна кількість кроків при інтегруванні ДР (9), як видно із табл. 4, із зростанням значення  $n$  зростає і, відповідно, зменшується необхідна довжина кроку.

На рис. 7 показані розрахункові залежності від часу миттєвого струму у колі 2. Штрихова крива – це результати інтегрування ДР (7), їй відповідають значення струму у перехідному процесі, достатньо близькі до точних значень струму; далі під час порівнянь будемо вважати цю криву еталонною. Всі інші криві цього рисунку – розрахункові залежності від часу струму під час інтегрування ДГМ-рівняння (9) з різними значеннями  $n$ . Значення струму цих залежностей у вузлах інтегрування ДР (9) отримані за формулою (2) і значенням часу  $t$  та амплітуд

$I_0, I_{cn}, I_{sn}$  у вузлі, а у проміжних точках між вузлами – за їх значеннями, отриманими шляхом інтерполяції. Найбільше відрізняються ці криві на перших двох періодах зміни ЕРС, коли струм по кривій намагнічування виходить у зоні насичення достатньо далеко вправо за її коліно. Суцільна крива на цьому рисунку відповідає інтегруванню ДР (9) з  $n = 5$ , і вона, як бачимо, достатньо близька до еталонної. Штрих-пунктирна крива відповідає  $n = 3$ , пунктирна –  $n = 2$  і суцільна з ромбиками –  $n = 1$ .

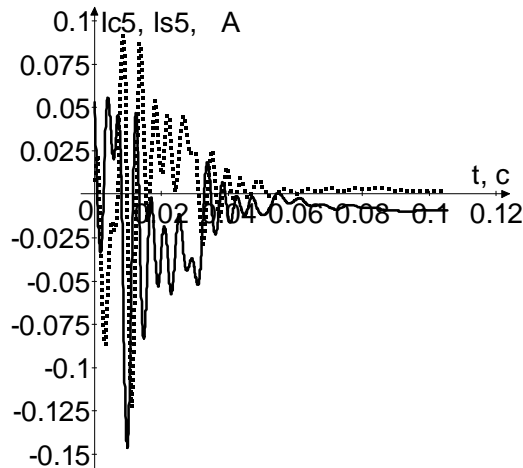


Рис. 6. Амплітуда 5-ї гармоніки

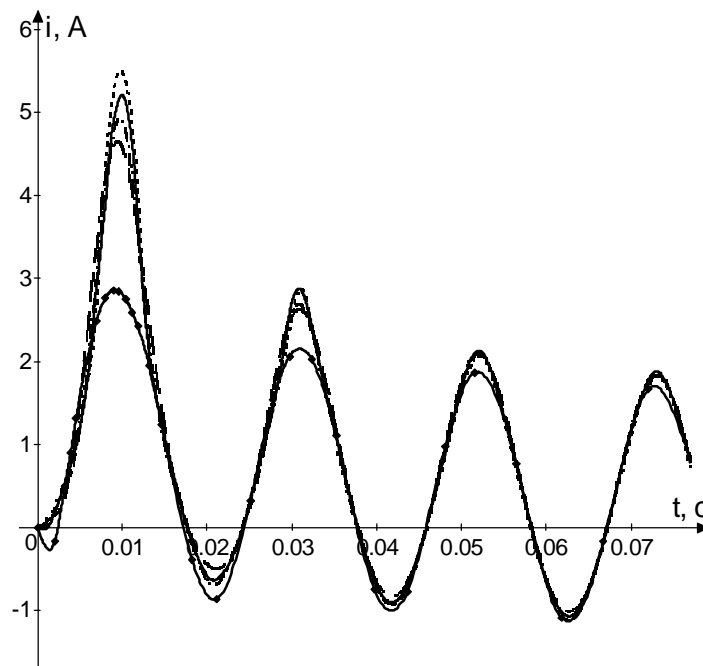


Рис. 7. Залежності від часу струму у колі 2

Як бачимо, якщо прийняти  $n = 1$  (враховуються тільки нульова складова і перша гармоніка), точність ДГМ-моделювання перехідного процесу є недопустимо низькою: отриманий на першому періоді зміни ЕРС пік струму є меншим від піка на еталонній кривій майже у два рази – відхилення становить 48 %. При  $n = 5$  відхилення пікового значення струму порівняно з еталонною кривою не перевищує 8 %. Якщо прийняти  $n = 3$ , відхилення становить 10,3 %, а при  $n = 2$  відхилення дорівнює 15,7 %. На наступних піках струму відхилення є меншими, оскільки



значення струму все менше віддаляються у бік насичення від коліна кривої намагнічування. Як бачимо, при збільшенні значення  $n$  розрахункова крива струму стає все ближчою до еталонної, але при цьому зростає й необхідна кількість кроків інтегрування. Отже, використовуючи ДГМ для розрахунку перехідних процесів у нелінійних електричних колах і електротехнічних пристроях, необхідно шукати компроміс між заданою точністю моделювання і допустимою кількістю кроків.

Результати інтегрування ДР (7) і (9) вище порівнювалися тільки за кількістю кроків на перших декількох періодах зміни ЕРС. При цьому не враховувалося те, що у разі переходу від інтегрування рівняння (7) до інтегрування рівняння (9) замість однієї скалярної змінної  $i$  отримуємо  $2n + 1$  скалярних змінних  $I_0, I_{c1}, I_{s1}, \dots, I_{cn}, I_{sn}$ , що є компонентами вектора  $\dot{\mathbf{I}}_r$ , і це спричинює збільшення обсягу обчислень на кроці. Однак збільшення кількості арифметичних операцій на кроці з збільшенням значення  $n$  може бути частково компенсоване тим, що у ДГМ-алгоритмах є багато матричних операцій, які, як відомо, допускають реалізацію паралельних обчислень з використанням багатопроцесорних і багатоядерних комп'ютерів. Швидкодія таких комп'ютерів сьогодні уже вимірюється сотнями гігафлопсів і є постійною тенденція до її зростання.

### Висновки

1. Для розрахунку перехідних процесів у нелінійних електричних колах і електротехнічних пристроях може бути застосований диференціальний гармонічний метод [1, 2].
2. Шляхом проведення розрахунків і оцінки їх точності верифіковано ДГМ-рівняння вигляду (9) і доведено, що воно наближено відтворює перехідні процеси; з його використанням у разі збільшення значення  $n$  кількості враховуваних компонент векторів вигляду (10а), (10б) точність моделювання зростає.
3. Застосування диференціального гармонічного методу до розрахунку перехідних процесів в нелінійних електричних колах дає змогу істотно зменшувати необхідну кількість кроків інтегрування і, відповідно, збільшувати довжину кроку.
4. Кількість необхідних кроків і їх довжина під час чисельного інтегрування рівнянь вигляду (9) залежать від прийнятого значення  $n$ . З збільшенням значення  $n$  необхідна кількість кроків зростає, і відносна ефективність використання диференціального гармонічного методу для розрахунку перехідного процесу зменшується.

1. Глухівський Л.Й. *Нелінійні коливання: чисельне полігармонічне моделювання*. – К.: Альфа ПіК, 2008. – 204 с.: іл. – Електронна версія: [www.nbuv.gov.ua/books/2008/08gljcpm.pdf](http://www.nbuv.gov.ua/books/2008/08gljcpm.pdf).
2. Глухівський Л.Й. *Періодичні процеси у нелінійній електротехніці (диференціальний гармонічний метод і його програмне забезпечення)*. – К.: Альфа ПіК, 2005. – 159 с.
3. Ван-дер-Поль Б. *Нелинейная теория электрических колебаний*. – М.: Связьиздат, 1935. – 320 с.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.Л. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
5. Перхач В.С. *Математичні задачі електроенергетики*. – Львів: Вища школа, 1989. – 462 с.