УДК 004.942

В.А. Андруник
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційних систем та мереж

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕНСОРА НА ОСНОВІ НЕПЕРЕРВНОГО МІНІМАКСНОГО СПЛАЙН-НАБЛИЖЕННЯ ЕКСПОНЕНЦІЙНИМ ВИРАЗОМ

Розглянуто властивості мінімаксного наближення з інтерполюванням сумою многочлена й експоненти із заданим показником степеня. Описано алгоритм побудови неперервного мінімаксного сплайн-наближення із заданою похибкою згаданим виразом. Застосовування такого наближення для опису температурної характеристики сенсора зменшує розбіжність між значеннями чутливості сенсора й похідної від сплайну. Наведено приклад застосування такого сплайн-наближення для опису низькотемпературної характеристики термодіодного сенсора.

It is considered properties of minimax approximation with interpolation by sum of polynomial and exponential with a priori given power degree. The algorithm for construction of continued minimax spline-approximation with a priori given error is described. The application of such approximation for description sensor transfer-function decreases difference between values of sensor sensitivity and spline derivative. The example of application of this approximation for the transfer-function of diode sensor for cryogen temperatures is given.

1. Вступ

Задача знаходження функціональних залежностей за експериментальними (табличними) даними виникає при розв’язуванні багатьох науково-технічних проблем. Вона полягає в виборі з деякої підмножини такої функції, яка якнайкраще наближає ці дані. При цьому можливі різні підходи до оцінювання якості наближення. Наприклад, оцінюється величина середньоквадратичного відхилення, величина середнього відхилення або використовується інша оцінка міри відхилення. А найрівномірніше наближення забезпечує мінімально можливе відхилення функції від апроксиманти за певної цій кількості параметрів. Для порівняння зауважимо, що при середньоквадратичному наближенні (метод найменших квадратів) мінімізується сума квадратів похибок відхилення. Метод найменших квадратів часто застосовують для лінеаризації характеристик цифрових вимірювальних засобів, наприклад, давачів тиску, інформаційний сигнал яких залежить від двох величин, наприклад: інформаційного сигналу і температури навколишнього середовища.

При наближенні функцій важливою є не тільки точність наближення, але вид і властивості наближувальної функції. Це пов’язано з тим, що переважно наближувальна функція повинна відповідати фізиці досліджуваного процесу. Точніше відобразити фізику процесу вдається, якщо наближати функцію разом з похідними або дотримуватись визначенних умов. При наближенні експерементальних даних такою умовою може бути мінімізаця відхилення самої функції і її центральних моментів. При сегментній апроксимації для цієї мети можуть використовуватись сплайн-функції, що дають змогу плавно наблизити шукану функцію.

Досі розв’язування задач аналітичної обробки дослідних даних практикується з застосуванням методів інтерполяції або середньоквадратичного наближення. Це пояснюється не стільки доцільністю застосування саме таких апроксимацій, скільки їх доступністю і традицією. Але, як зазначає відомий український класик з теорії апроксимації Є.Я. Ремез, цитуючи видатного бельгійського спеціаліста з питань обробки дослідних даних Годсельса: «Прийшла пора повністю порвати з традицією, відмовитися від спроб відшукання для фізичних величин значень найбільших ймовірних і обмежитись виключно відшуканням значень, які найкраще наближають». Наприклад, в багатьох технічних застосуваннях зараз доводиться спостерігати, що дослідники проводять апроксимацію за середньоквадратичнім критерієм, а якість наближення оцінюють величиною отриманої максимальної абсолютної похибки, що є недопустимим з погляду методології і теорії наближення.

Щодо практичного використання найкращого рівномірного наближення, то треба зазначити, що його доцільно використовувати, коли наближувані (експереметальні) дані отримані з систематичною похибкою вимірювальних приладів. Як у першому, так і у другому випадку недоцільно вимагати точного збігу наближуваної й апроксимуючої функцій у заданих точках, тобто інтерполяційні методи для цих випадків не підходять.

Задача знаходження найкращого рівномірного наближення виникає, наприклад, під час:

– проектування контрольно-вимірювальних приладів, зокрема пірометрів або термометрів (градуювання, лінеаризація статичних характеристик);

– проектування різноманітних функціональних перетворювачів (опис передавальнних функцій);

– реалізації алгоритмів обчислення спеціальних функцій на високопродуктивних процесорах обробки даних (апроксимація складних функціональних залежностей простими аналітичними виразами);

– побудови математичних моделей різноманітних неперервних процесів на основі дискретних вимірювань їх значень;

–для представлення в машинобудуванні контурів проекцій деталей зі складними геометричними формами, а також аналітичного представлення кривих, які задають траєкторію різальних інструментів у верстатах з програмним керуванням;

– проектування та навчання нейронних мереж (часто використовують метод найменших квадратів).

Крім того, рівномірну апроксимацію даних доцільно застосовувати у різноманітних задачах ущільнення масивів результатів вимірювань, що містять методичну похибку у відомих межах (це може бути телеметрична інформація або масиви геофізичних чи сейомічних вимірювань і т.д.).

Мінімакс – це один з принципів оптимального вибору параметрів. Суть цього принципу легко пояснити на прикладі емпіричних даних. При наближенні функцій апроксимована функція найчастіше задається або аналітично, або у вигляді дискретних значень функції (табличне задання функції).

Задача знаходження функціональних залежностей за експериментальними (табличними) даними виникає під час вирішення багатьох науково-технічних проблем. Вона полягає в виборі з деякої підмножини такої функції, яка якнайкраще наближає ці дані. При цьому можливі різні підходи в оцінці якості наближення. Наприклад, оцінюється величина середньоквадратичного відхилення, величина середнього відхилення або використовується інша оцінка міри відхилення. Часто розглядають наближення, при якому мінімізується найбільше за модулем відхилення функції від дослідних даних, тобто чебишовське наближення функцій. Отже, найкраще рівномірне наближення забезпечує мінімально можливе відхилення функції від апроксиманти за певної кількості параметрів. Для порівняння зауважимо, що при середньоквадратичному наближенні (метод найменших квадратів) мінімізується сума квадратів похибок відхилення.

Для опису статичних характеристик сенсорів часто використовуються розривні мінімаксні поліноміальні сплайни, наближення на окремих ланках яких підбираються так, щоб похибка наближення характеристики в жодній точці діапазону вимірювання не перевищувала деякої наперед заданої величини. Доцільність застосування таких сплайнів з роздільним мінімаксним наближенням на окремих частинах діапазону вимірювання пояснюється можливістю отримання потрібної точності наближення при невеликих значеннях кількості параметрів у поліноміальних наближеннях [1]. Такі апроксимації, неперервні на окремих ланках (частинах діапазону вимірювання) використовуються тоді, коли визначальною умовою є лише забезпечення відтворення значень функції з певною похибкою. Прикладом такої задачі може бути знаходження функціональної залежності для опису статичних характеристик термоперетворювачів [2 – 4]. Проте для дослідження чутливості сенсора такі розривні апроксимації не придатні, оскільки значення похідної в точках розриву мають значні розбіжності. В роботі [5] для наближення термометричної характеристики кремнієвих діодних сенсорів температури й їх чутливості використано апроксимації за методом найменших квадратів поліномами Чебишова. При цьому задовільна точність апроксимації термометричної характеристики сенсора та його чутливості досягається при сотому і вищому степені як поліномів Чебишова, що ускладнює практичне застосування цих апроксимацій.

2. Постановка проблеми

Задача відтворення статичної характеристики сенсора і його чутливості зводиться до побудови неперервного й гладкого сплайн-наближення. Для досягнення оптимальної точності треба застосовувати рівномірне сплайн-наближення, яке забезпечує наближення з найменшою можливою похибкою при заданому степені полінома [1, 7]. Побудову гладкого розривного сплайн-наближення поліномами третього степеня із застосуванням чебишовського критерію описано в роботі [7], проте теоретичного обґрунтування його побудови не наведено. В цій статті запропоновано спосіб підбору таких рівномірних поліноміальних наближень на окремих ланках сплайна, при яких похибка наближення на всьому відрізку наближення не перевищує деякої наперед заданої величини, і при цьому складений із них сплайн і його похідна є неперервними функціями.

Під час дослідження температурних сенсорів важливе значення має точність апроксимації – як його температурної характеристики, так і чутливості [1]. У роботах [1, 2] для підвищення точності відтворення чутливості сенсора пропонується використовувати поліноми Чебишова високих степенів, що ускладнює їх практичне застосування через характерні для високих степенів пульсації. У даній роботі для зменшення розбіжності значень чутливості сенсора й похідної від сплайна пропонується застосовувати неперервне чебишовське сплайн-наближення температурної характеристики сенсора сумою многочлена й експоненти із заданим показником степеня. Під мінімаксним сплайн-наближенням розумітимемо таке, в якому наближення на кожній ланці визначається за чебишовським критерієм. Наближення за цим критерієм ще називають чебишовським, або рівномірним [3]. Побудова неперервного мінімаксного сплайн-наближення сумою многочлена й експоненти із заданим показником степеня ґрунтується на властивостях найкращого рівномірного наближення цим виразом з інтерполюванням.

3. Означення та властивості рівномірного сплайн-наближення

Задача рівномірного сплайн-наближення неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a\,,b]$ полягає в знаходженні рівномірного наближення $f(x)$ декількома окремими виразами на часткових підінтервалах $[t_i\,,\ t_{i+1}]$, $i=\overline{1,q}$, $t_1=a$, $t_{q+1}=b$ відрізка $[a\,,b]$. Ці наближення підбираються так, щоб похибка в жодній точці на всьому відрізку $[a\,,b]$ не перевищувала наперед заданої величини. Доцільність такої постановки задачі з роздільним найкращим рівномірним наближенням на окремих підінтервалах відрізка $[a\,,b]$ пояснюється можливістю отримання потрібної точності наближення при невеликих значеннях кількості параметрів наближаючих виразів. Кусково-неперервні апроксимації використовуються, зокрема, у випадку, коли наближувана функція має особливості в деяких точках, які спричиняють погану апроксимацію на всьому відрізку.

Розглянемо сплайн

$$S(x)=F\left(a^{(j)};\,x\right),\quad t_j\le x\le t_{j+1}\,,\qquad j=1,\ldots,q\,,\tag{1}$$

в якому кожний вираз $F\left(a^{(j)};\,x\right),\ \ j=1,...,q$ є найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ на відрізку $\left[t_j\,,\,t_{j+1}\right]$ з вагою $w(x)$. Точки $t_j\,,\ \ j=1,...,q+1$ називають вузлами сплайна, а вираз $F\left(a^{(j)};\,x\right)$, що задає значення сплайна на відрізку $\left[t_j\,,\,t_{j+1}\right]$, j-ю ланкою сплайна.

Якщо G_j – значення похибки наближення на j-й ланці, то похибкою наближення рівномірним сплайном називається величина G, яка дорівнює

$$G=\max_{1\le j\le q} G_j\,. \tag{2}$$

Сплайни (1) поєднують позитивні властивості найкращого рівномірного наближення одним виразом (найменша похибка апроксимації при фіксованій кількості параметрів) і наближень класичними сплайнами (стійкість при обчисленні) [1].

Рівномірне сплайн-наближення характеризується функціональними властивостями й способом побудови. За функціональними властивостями розрізняють кусково-наперервні (кускові) й неперервні (склеєні) сплайни. В випадку неперервних сплайн-наближень на кожній ланці будується найкраще рівномірне наближення з певними додатковими умовами, які переважно визначають значення похибки в вузлах. Ця похибка може дорівнювати нулю або визначатись допустимою похибкою сплайн-наближення. Необхідність розгляду кусково-неперервних сплайн-наближень визначається їх застосуванням, наприклад, при описі статичних характеристик термоперетворювачів, або апаратній реалізації обчислення функцій [1]. При розв'язуванні таких задач допускається розривність апроксимуючої функції, лише б похибка наближення була достатньо малою.

За способом побудови розрізняють однорідні й неоднорідні сплайни [1]. Однорідні сплайни – це сплайни, в яких ланки представляються наближаючими виразами одного й того ж виду, а неоднорідні – це сплайни, в яких ланки описуються різними наближаючими виразами. Можливість вибору різних наближаючих виразів на окремих ланках сплайна дає змогу досягати точнішого наближення функцій на великих інтервалах. Неоднорідні сплайни використовуються при обчисленні спеціальних функцій і моделюванні деяких процесів [1].

Сплайни розрізняють ще й за способом вибору вузлів. Бувають сплайни як з однаковою довжиною ланки (фіксовані вузли), так і з різною довжиною (довільні вузли). Побудова сплайнів з однаковою довжиною ланки по суті зводиться до послідовного знаходження рівномірного наближення для відомих підінтервалів і тому далі розглядаються тільки сплайни з довільними вузлами. У сплайнах з довільними вузлами довжина ланки визначається залежно від умов оптимальності, тобто вибір вузлів при заданій похибці наближення повинен забезпечити мінімальну кількість ланок, а при заданій кількості ланок – мінімальну похибку. Зустрічаються також задачі, в яких довжини ланок визначаються певними залежностями, наприклад, щоб довжина ланки була кратною степені двійки [1].

Розглянемо алгоритми побудови рівномірних сплайн-наближень з заданою похибкою й довільними вузлами для неперервної функції $f(x)$, заданої на множині точок $X=\{x_1\,,\,x_2\,,...,\,x_n\}$ відрізку $[a\,,\,b]$. Вони побудовані на основі алгоритмів для знаходження рівномірних сплайн-наближень з многочленними і раціональними ланками [1,2,3]. Відмінності зумовлені необхідністю знаходження сплайн-наближень нелінійними виразами. Крім цього, уточнено спосіб знаходження вузлів.

3. Найкраще мінімаксне наближення експоненційним виразом з інтерполюванням

Експоненційний вираз

$$E_m(a;x)=\sum_{i=0}^{m} a_i\,x^i + Ae^{qx} \tag{3}$$

від $(m+2)$ параметрів $\left(a_i,\,i=\overline{0,\,m},\,A\right)$ і заданим значенням q згідно з [4] задовольняє умову Хаара на всій числовій осі, оскільки експонента на $[-\infty,\,\infty]$ має $(m+1)$-у неперервну похідну і при тому її

$(m+1)$-а не змінює знаку. Тому для виразу (3) справджуються властивості мінімаксного наближення з інтерполюванням, встановлені в роботі [5].

Розглянемо неперервну на відрізку $[a, b]$ функцію $f(x)$ ($f(x) \in C[a, b]$) і вагову функцію $w(x)$, неперервну на $[a, b]$ таку, що не набуває нульового значення на $[a, b]$. Згідно з характеристичною властивістю мінімаксного наближення з інтерполюванням у декількох точках, встановленою в роботі [5], таке наближення виразами, що задовольняють умову Хаара, існує, й до того ж єдине. Параметри мінімаксного наближення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ із ваговою функцією $w(x)$ й інтерполюванням у точках u_i ($u_i \in [a, b]$, $i = \overline{1, k}$) визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} E_m(a^*; u_i) = v_i, \quad i = \overline{1, k} \\ \left(f(z_i) - E_m(a^*; z_i)\right) / w(z_i) = (-1)^{i + \Theta\left(\prod_{j=1}^{k} (z_i - u_j)\right)} m, \quad i = \overline{1, m-k+3} \end{cases}, \tag{4}$$

де

$$|m| = \max_{x \in [a, b]} \left| \left(f(x) - E_m(a^*; x)\right) / w(x) \right|,$$

z_i ($i = \overline{1, m-k+3}$) – точки альтернансу, а $\Theta(x)$ – функція Хевісайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0 \\ 1, & \text{якщо} \quad x \geq 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Точки альтернансу z_i ($i = \overline{1, m-k+3}$) – це деякі точки із $[a, b]$, які не збігаються з точками u_i ($i = \overline{1, k}$) й упорядковані за зростанням. Для визначення цих точок альтернансу можна застосувати схему Ремеза з одноточковим уточненням наближення до точок чебишовського альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле–Пуссена [6].

4. Неперервне мінімаксне сплайн-наближення експоненційним виразом із заданою похибкою

Під неперервним мінімаксним сплайном неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ із ваговою функцією $w(x)$ розумітимемо

$$S(x) = \begin{cases} E_m\left(a^{(1)}; \; x\right), & t_1 \leq x \leq t_2 \\ E_m\left(a^{(2)}; \; x\right), & t_2 \leq x \leq t_3 \\ \quad \ldots & \\ E_m\left(a^{(q)}; \; x\right), & t_q \leq x \leq t_{q+1}, \end{cases} \tag{6}$$

де q – кількість ланок у сплайн-наближенні, точки t_j ($j = \overline{1, q+1}$) – межі ланок, які називатимемо вузлами сплайна. Крайні точки t_1 і t_{q+1} збігаються з межами відрізка $[a, b]$ – $t_1 = a$, $t_{q+1} = b$, а відрізки $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{1, q}$ – це ланки сплайна, на кожній з яких значення сплайна задається відповідним виразом – $E_m\left(a^{(j)}; x\right)$.

У цьому сплайні кожний із виразів $E_m\left(a^{(j)}; x\right)$, $j = \overline{1, q}$ є чебишовським наближенням функції $f(x)$ на відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ з вагою $w(x)$

$$\max_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} \left| \frac{f(x) - E_m\left(a^{(j)}; x\right)}{w(x)} \right| = \min_a \max_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} \left| \frac{f(x) - E_m(a; x)}{w(x)} \right|, \tag{7}$$

і, виходячи з неперервності сплайна, значення цих виразів у його внутрішніх вузлах t_j, $j=\overline{2,\,q}$ збігаються

$$E_m\left(a^{(j-1)};\,t_j\right)=E_m\left(a^{(j)};\,t_j\right),\qquad j=\overline{2,\,q}. \tag{8}$$

Окрім того, якщо G_j – значення похибки наближення функції $f(x)$ з вагою $w(x)$ на *j*-й ланці сплайна

$$G_j=\max_{t_j\le x\le t_{j+1}}\left|\left(f(x)-E_m\left(a^{(j)};x\right)\right)/w(x)\right|, \tag{9}$$

то $\max\limits_{1\le j\le q} G_j\le G_0$, де G_0 – задана похибка сплайн-наближення.

Задача знаходження для функції $f(x)$ сплайн-наближення $S(x)$ (6) із властивостями (5)–(6) на відрізку $[a\,,\,b]$ полягає в забезпеченні заданої похибки наближення G_0 при найменшій можливій кількості ланок. Розв'язування цієї задачі зводиться до такого вибору меж ланок – вузлів t_j $\left(j=\overline{2,\,q}\right)$ сплайн-наближення (6), при яких довжини всіх ланок, можливо, крім останньої, є максимально допустимими для заданої похибки наближення G_0.

Для побудови такого сплайн-наближення (6) можна використати алгоритми побудови мінімаксних сплайн-наближень, що описано в роботах [3, 7, 8, 9], з передбаченням дотримання умов (6) щодо неперервності сплайна.

Параметри виразів (3) сплайн-наближення (6) на кожній із ланок визначаються відповідно до критерію мінімаксного наближення з точним відтворенням значення функції в заданих точках (4). Для отримання неперервного сплайна відповідно до умови (8) необхідно забезпечити збіг значень ланок сплайна у внутрішніх вузлах t_j $\left(j=\overline{2,\,q}\right)$. На першій ланці сплайна використовується рівномірне наближення з точним відтворенням значення функції в правій межі ланки – t_2. Параметри рівномірного наближення виразом (3) на першій ланці сплайна визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases}\left(f\left(z_i^{(1)}\right)-E_m\left(a^{(1)};\;z_i^{(1)}\right)\right)\Big/w\left(z_i^{(1)}\right)=(-1)^i\,m_1\;, & i=\overline{1,\;m+2}\\ E_m\left(a^{(1)};\;t_2\right)=f\left(t_2\right)\;, & \end{cases} \tag{10}$$

де $z_i^{(1)}$, $i=\overline{1,\;m+2}$ – впорядковані за зростанням $z_i^{(1)}<z_{i+1}^{(1)}$, $\left(i=\overline{1,\;m+1}\right)$ точки альтернансу на відрізку $[t_1,\;t_2]$. При цьому похибка апроксимації на першій ланці дорівнює модулю m_1 $\left(G_1=|m_1|\right)$.

Параметри виразів (3) сплайн-наближення (6) для функції $f(x)$ на внутрішніх ланках, починаючи з другої до передостанньої, визначаються за критерієм чебишовського наближення з умовою точного відтворення значення функції у крайніх точках кожної з цих ланок $[t_j,\;t_{j+1}]$, $j=\overline{2,\,q-1}$. Згідно з характеристичною властивістю рівномірного наближення з інтерполюванням у крайніх точках (4) значення коефіцієнтів відповідних виразів (3) задовольняють системи рівнянь

$$\begin{cases}E_m\left(a^{(j)};\;t_j\right)=f\left(t_j\right)\\ \left(f\left(z_i^{(j)}\right)-E_m\left(a^{(j)};\;z_i^{(j)}\right)\right)\Big/w\left(z_i^{(j)}\right)=(-1)^i\,m_j\;,\quad i=\overline{1\;,\;m+1}\;,\\ E_m\left(a^{(j)};\;t_{j+1}\right)=f\left(t_{j+1}\right)\;,\end{cases}\qquad j=\overline{2,\,q-1}, \tag{11}$$

де $z_i^{(j)}$, $i=\overline{1,\ m+1}$, $j=\overline{2,\ q-1}$ – впорядковані за зростанням $z_i^{(j)} < z_{i+1}^{(j)}$, $\left(i=\overline{1,\ m}\right)$ точки альтернансу j-ї ланки, тобто на відрізку $\left[t_j,\ t_{j+1}\right]$. Як і для першої ланки, похибка апроксимації на кожній із цих ланок дорівнює модулю відповідного значення m_j $\left(G_j = \left|m_j\right|\right)$, $j=\overline{2,\ q-1}$.

Для забезпечення неперервності сплайна наближення виразом (3) на останній ланці сплайна визначається як мінімаксне наближення з точним відтворенням значення функції в крайній лівій точці ланки – t_q. Значення коефіцієнтів цього наближення відповідно до (4) задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} E_m\left(a^{(q)};\ t_q\right) = f\left(t_q\right) \\ \left(f\left(z_i^{(q)}\right) - E_m\left(a^{(q)};\ z_i^{(q)}\right)\right) \Big/ w\left(z_i^{(q)}\right) = (-1)^i m_q\ , \quad i=\overline{1,\ m+2} \end{cases}, \tag{12}$$

де $z_i^{(q)}$, $i=\overline{1,\ m+2}$ – впорядковані за зростанням $z_i^{(q)} < z_{i+1}^{(q)}$, $\left(i=\overline{1,\ m+1}\right)$ точки альтернансу на відрізку $\left[t_q,\ t_{q+1}\right]$. Похибка апроксимації на останній ланці дорівнює модулю m_q $\left(G_q = \left|m_q\right|\right)$.

Отже, побудова неперервного чебишовського сплайн-наближення сумою многочленна й експоненти із заданим показником степеня ґрунтується на застосуванні характеристичної властивості чебишовського наближення з інтерполюванням виразами, що задовольняють умову Хаара. Значення параметрів наближення на першій ланці цього сплайна визначається як рівномірне наближення виразом (3) з інтерполювання у крайній правій точці ланки. Параметри наближення на внутрішніх ланках сплайна, починаючи із другої до передостанньої, визначаються відповідно до характеристичної властивості рівномірного наближення з інтерполюванням у крайніх точках цих ланок. Мінімаксне наближення на останній ланці сплайна точно відтворює значення функції у крайній лівій точці ланки. При цьому довжини всіх ланок сплайна, крім останньої, вибираються максимально можливими для заданої похибки сплайн-наближення.

5. Неперервна апроксимація низькотемпературної характеристики термодіодного сенсора

Апроксимуємо неперервним мінімаксним сплайном (5) температурну характеристику термодіодного сенсора типу DT-471 фірми Lake Shore, яка подана на сайті [10] (Curve 10). Температурна характеристика цього сенсора задана 120-ма значеннями в діапазоні від 1.4 K до 475 K.

Під час дослідження точності відтворення чутливості температурної характеристики сенсора типу DT-471 неперервними мінімаксними сплайнами з експоненційним виразом виявилось, що таке сплайн-наближення з ланками вигляду

$$U_j(T) = \sum_{i=0}^{3} a_i^{(j)} T^i + Ae^{qT}\ , \qquad q = 0.0071\ , \quad j=\overline{1,6} \tag{13}$$

забезпечує відтворення чутливості сенсора з похибкою 18.3% у разі сплайн-наближення з відносною похибкою 0.0307%. Результати цього сплайн-наближення подано в таблиці.

Графік розрахованих за похідною від цього сплайна значень чутливості сенсора в діапазоні температур від 1.4 K до 40 K й відповідні спостережувані значення чутливості подано на рисунку. Точками на цьому рисунку відображено результати спостереження, а крива зображає значення похідної від сплайна. Із цього графіка видно, що відтворена функція чутливості сенсора за кількістю точок екстремуму й характеру монотонності відповідає його дійсній чутливості, що в принципі дає змогу застосовувати це наближення для аналізу чутливості сенсора.

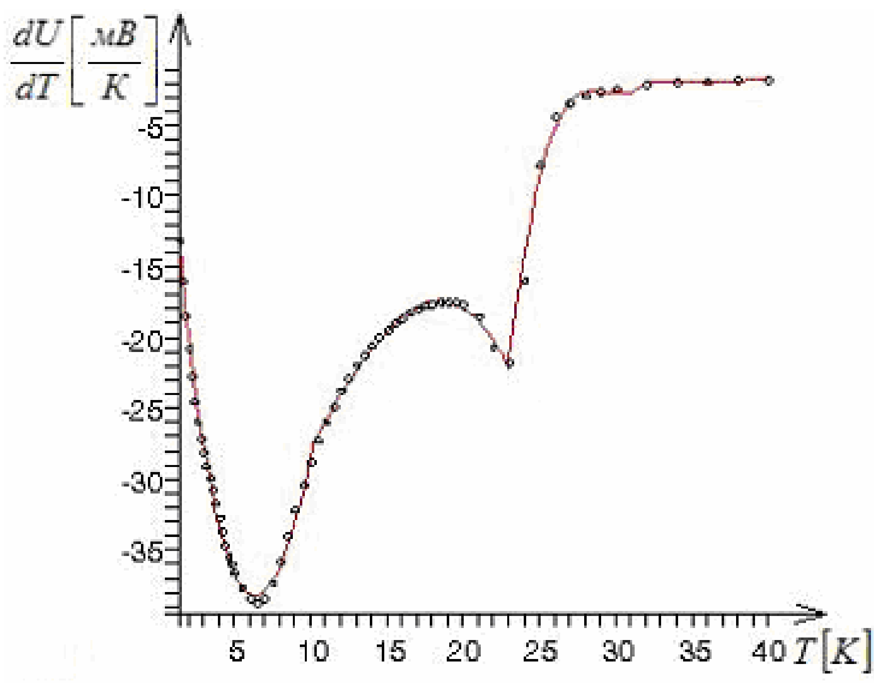
Для порівняння зазначимо, що неперервне сплайн-наближення з ланками (11) і відносною похибкою 0.03% забезпечує відтворення чутливості з похибкою 33%. Під час апроксимації тієї самої температурної характеристики (Curve 10) неперервним мінімаксним поліноміальним сплайном із відносною похибкою 0.0307% і такою самою кількістю параметрів, тобто многочленом четвертого степеня

$$U_j(T) = \sum_{i=0}^{4} a_i^{(j)} T^i \, , \tag{14}$$

де j – номер ланки, також отримано сплайн із шести ланок. При цьому відносна похибка неперервного сплайн-наближення температурної характеристики поліномами (14) становить 0.028%, а найбільша відносна похибка відтворення чутливості сенсора похідною від сплайна – 96%.

Результати апроксимації температурної характеристики експоненційним сплайном

Номер ланки	Межі ланки	Значення коефіцієнтів виразу (11) у послідовності входження до виразу	Похибка апроксимації [%]	
			характе-ристики	чутли-вості
1	1.4; 10.5	70527.5597216; 500.736805; 1.77043494; 0.0046811542; -70525.85376878	0.0302	7.8
2	10; 23	14877.9473621; 105.577969; 0.37518959; 9.4387055_{10}^{-4}; -14876.1637857	0.026	2.3
3	23; 32	-152731.732599; -1086.415768; -3.753882; -0.0112231846; 152747.0319	0.03064	18.3
4	30; 120	-3.30964446; -0.034627373; -8.9826388_{10}^{-5}; -4.744808776_{10}^{-7}; 4.484077959	0.029	9.8
5	120; 420	1.17213835; -1.64879371_{10}^{-3}; -2.266434_{10}^{-6}; 3.53599395_{10}^{-9}; -5.9405556_{10}^{-3}	0.024	0.89
6	420; 475	12.5298707 -0.100573914 2.7509956_{10}^{-4}; -3.1931337_{10}^{-7}; 0.256778477	0.0025	0.23



Графік чутливості сенсора типу DT-471 та її наближення

Висновок

Наведені в таблиці результати неперервної сплайн-апроксимації температурної характеристики термодіодного сенсора підтверджують доцільність застосування мінімаксного сплайн-наближення сумою многочлена й експоненти із заданим степенем. Порівняно з поліноміальним сплайн-наближенням із такою самою кількістю параметрів застосування сплайн-наближення сумою многочлена й експоненти із заданим степенем більш придатне для відтворення чутливості сенсора: похибка відтворення чутливості у цьому разі майже у п'ять разів менша. Можливо, що похибку відтворення чутливості сенсора похідною від неперервного мінімаксного сплайн-наближення експоненційним виразом можна ще дещо зменшити, підібравши відповідне значення степеня експоненти q у виразі (3), або застосувавши різні значення параметра q на різних ланках.

1. Иващенко А. Н., Шварц Ю. М. Аппроксимация термометрических характеристик кремниевых диодных сенсоров температуры // Оптоэлектроника и полупроводниковая техника: Межвед. сб. науч. тр. – 2003. – Вып. 38. – С. 61–70. 2. Шварц Ю. М., Яганов П. А., Дзюба В. Г. Нейросетевая аппроксимация термометрической характеристики диодного сенсора // Технология и конструирование в электрон. аппаратуре. – 2005. – № 5. – С. 18–22. 3. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с. 4. Бердышев В. И., Субботин Ю. Н. Численные методы приближения функций. – Свердловск: Среднеуральское кн. изд-во, 1979. – 120 с. 5. Малачівський П. С. Рівномірне наближення функцій з інтерполюванням у заданих точках // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 4. – С. 142–150. 6. Малачівський П. Модифікований алгоритм Валле–Пуссена // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2005. – Вип. 2. – С. 159–166. 7. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наукова думка, 1980. – 352 с. 8. Монцибович Б. Р., Криворучко Г. Ф., Малачивский П. С. и др. Диалоговый пакет программ для аналитической обработки табличных данных (ППП РАДАН – 2). – Львов: 1988. – 135 с. – Деп. в Укр. РФАП 27.03.1990, № АП0278. 9. Малачівський П., Андруник В. Рівномірне сплайн-наближення // Комп'ютерні технології друкарства. – Львів: Українська академія друкарства, 2002. – № 7. – С. 107–115. 10. www.lakeshore.com/ /Curve 10.