

УДК 621.3.045

В.М. ВІННІК, В.І. БУДЗАН, О.Й. КОЦЮМБАС

Національний університет "Львівська політехніка",

## КІНЕМАТИЧНІ ТА СИЛОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ В НАМОТУВАЛЬНІЙ СИСТЕМІ З ПОСТУПАЛЬНИМ ПІДПРУЖИНЕНИМ КОМПЕНСАТОРОМ

© Віннік В.М., Будзан В.І., Коцюмбас О.Й., 2008

*Встановлені геометричні та кінематичні залежності між параметрами системи з двома циліндричними барабанами, пружним намотувальним матеріалом і встановленим під довільним кутом до міжосьової лінії поступальним компенсатором. Диференційні рівняння руху барабанів та рухомої частини компенсатора дають змогу виконувати аналіз динаміки системи.*

*Geometrical and kinematics dependences are set between the parameters of the system with two cylindrical drums, by resilient winding material and set under an arbitrary corner to the interaxle line by a forward compensate. Differential equalizations of motion of drums and mobile part of compensate allow to conduct the analysis of dynamics of the system.*

**Постановка проблеми.** Питання про силу натягу матеріалу в намотувальних системах, її величину та стабільність – актуальне завдання різних галузей промисловості: виробництва прокатного листа, дроту, обмоток електроелементів [1], автомобільних шин, паперу; раціональної конструкції та експлуатації агрегатів з гнучкими тяговими органами тощо. Технологічні та конструктивні вимоги до режимів роботи намотувальних систем зумовлюють використання різноманітних компенсаторів (поступальних, коромислових, комбінованих). Взаємозв'язок між окремими параметрами, їх вплив на кінематику та динаміку таких систем загалом (математична модель) практично не вивчені.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Аналітичні дослідження намотувальних систем переважно стосуються довгомірних об'єктів із значними відстанями між ведучим та веденим барабанами [1]. Є різні інженерні рішення регулювання натягу, наприклад [2].

Для короткомірних намотувальних систем (за співмірних значень діаметрів барабанів і їх міжцентрової відстані) з компенсаторами натягу загальні математичні моделі нам не відомі. Експериментальні дослідження, наприклад [3], не охоплюють всі аспекти завдання.

**Мета статті.** Мета роботи полягала в одержанні загальних залежностей взаємозв'язку між геометричними, кінематичними та силовими параметрами намотувальної системи з двома циліндричними барабанами, намотувальним матеріалом і поступальним компенсатором.

**Виклад матеріалу.** Розглянемо відкриту намотувальну систему з провідним (приймним) та веденим (віддаючим) циліндричними барабанами і циліндричною робочою поверхнею поступального підпружиненого компенсатора (рис. 1). Цю систему без порушення загальності міркувань можна розглядати як незалежну або як модуль складнішого об'єкта.

Нехай  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_0$  – радіуси барабанів та робочої поверхні компенсатора відповідно;  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi$  – кути нахилу контактних радіус-векторів барабанів та компенсатора до міжосьової лінії;  $\alpha_w$  – міжосьова відстань між барабанами;  $x_0$ ,  $y_0$  – координати точки  $O$  – початку напрямної опори компенсатора (узята на його осьовій лінії) в системі з початком координат у центрі осі першого барабана та віссю абсцис, напрямленою вздовж міжцентрової лінії барабанів.

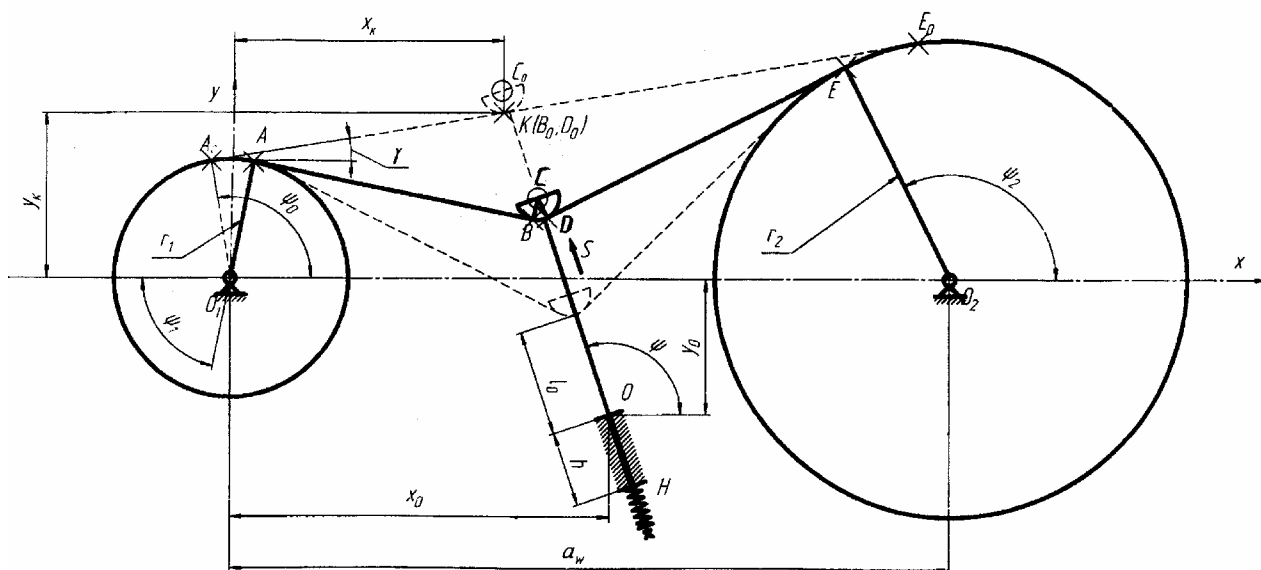


Рис. 1. Відкрита намотувальна система з поступальним підпружиненим компенсатором

Встановимо деякі геометричні співвідношення. Якби не було компенсатора, намотувальний матеріал був би нахилений до осі абсцис під кутом  $\gamma = \arcsin \frac{r_2 - r_1}{\alpha_w}$ , а контактні радіус-вектори –

під кутами  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_0 = \gamma + \frac{\pi}{2} = \arccos \frac{r_2 - r_1}{\alpha_w}$ .

У цьому граничному положенні робоча поверхня компенсатора дотикалася б до матеріалу в точці  $K$  з координатами (знаходження координат не наводиться через його очевидність)

$$x_K = \frac{y_0 \cos \gamma \cos \psi - x_0 \sin \psi \cos \gamma - r_1 \cos \psi}{\sin(\gamma - \psi)} + r_0 \cos \gamma \operatorname{ctg}(\psi - \gamma), \tag{1}$$

$$y_K = \frac{y_0 \cos \psi \sin \gamma - x_0 \sin \psi \sin \gamma - r_1 \sin \psi}{\sin(\gamma - \psi)} + r_0 \sin \gamma \operatorname{ctg}(\psi - \gamma). \tag{2}$$

Позначимо:  $x_C, y_C$  – поточні координати центра робочої поверхні компенсатора.

Тоді можна виразити довжини ділянок матеріалу між барабанами і компенсатором та матеріалу, що контактує з робочою частиною компенсатора (фрикційною або поверхнею ролика) в такій формі:

$$l_{AB} = l_1 = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - (r_1 + r_0)^2}, \tag{3}$$

$$l_{DE} = l_2 = \sqrt{(\alpha_w - x_C)^2 + y_C^2 - (r_2 + r_0)^2}, \tag{4}$$

$$l_{BD} = l_K = r_0(\psi_2 - \psi_1). \tag{5}$$

Довжини  $l_1$  та  $l_2$  можна виразити також через кути  $\psi_1$  і  $\psi_2$ . З порівняння цих виразів з (3) і (4) відповідно встановлюються залежності між кутами положення контактних радіус-векторів та координатами центра робочої поверхні

$$x_C \cos \psi_1 + y_C \sin \psi_1 = r_1 + r_0, \tag{6}$$

$$(x_C - \alpha_w) \cos \psi_2 + y_C \sin \psi_2 = r_2 + r_0. \tag{7}$$

Звідси можна знайти явні вирази тригонометричних функцій  $\psi_1$  та  $\psi_2$  від координат  $x_C$ ,  $y_C$ . Так:

$$\cos \psi_1 = \frac{x_C(r_1 + r_0) - y_C \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - (r_1 + r_0)^2}}{x_C^2 + y_C^2}, \quad (8)$$

$$\cos \psi_2 = \frac{(x_C - \alpha_w)(r_2 + r_0) - y_C \sqrt{(x_C - \alpha_w)^2 + y_C^2 - (r_2 + r_0)^2}}{(x_C - \alpha_w)^2 + y_C^2} \quad (9)$$

Ці вирази доволі громіздкі, незручні для використання та аналізу.

Нам видається вдалішим використанням наближених значень тригонометричних функцій.

Якщо  $S$  – переміщення компенсатора до граничного положення матеріалу, а  $l_0$  – довжина консольної частини компенсатора при запасовці намотувального матеріалу без натягу (від початку напрямної опори до центра робочої поверхні), то поточне значення довжини консолі компенсатора набуде форми

$$l = l_0 \pm S.$$

Знак “плюс” відповідає односторонньому розміщенню осей барабанів та опори компенсатора щодо граничного положення матеріалу, “мінус” – різносторонньому.

З геометричних співвідношень бачимо, що раціональні (найменші) значення довжини консолі компенсатора існують при  $l_0 = r_0$  у разі одностороннього розміщення опор і

$$l_0 = \frac{x_0 \sin \gamma - y_0 \cos \gamma + r_1 + r_0}{\sin(\psi - \gamma)} \quad \text{– при різносторонньому їх розміщенні.}$$

Координати центра робочої поверхні можна виразити так:

$$x_C = x_0 + (l_0 \pm S) \cos \psi, \quad (10)$$

$$y_C = y_0 + (l_0 \pm S) \sin \psi. \quad (11)$$

Тоді довжини ділянок між барабанами та компенсатором визначаються залежностями

$$l_j^2 = (x_0 - x_j)^2 + y_0^2 + (l_0 \pm S)^2 - (r_j + r_0)^2 + 2(l_0 \pm S)((x_0 - x_j) \cos \psi + y_0 \sin \psi). \quad (12)$$

Тут  $j=1;2$  – індекси провідного та веденого барабанів відповідно,

$x_j$  – абсциса відповідного барабана:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \alpha_w$ .

Розклавши значення  $l_j$  в степеневий ряд по  $S$  з точністю до першого степеня, можемо зобразити

$$l_j = l_{j0} + \lambda_j S, \quad (13)$$

де  $l_{j0}$  – довжина ділянки матеріалу тільки при запасовці (без натягу) при  $S = 0$ ;  $\lambda_j = \frac{dl_j}{dS}$

$$l_{j0} = \sqrt{(x_0 - x_j)^2 + y_0^2 + l_0^2 + 2l_0((x_0 - x_j) \cos \psi + y_0 \sin \psi) - (r_j + r_0)^2}, \quad (14)$$

$$\lambda_j = \frac{l_0 + (x_0 - x_j) \cos \psi + y_0 \sin \psi}{l_{j0}}. \quad (15)$$

Значення кутів між контактними радіус-векторами барабанів та віссю абсцис встановлюються з геометричних міркувань

$$\psi_j = \pi(j-1) + \arctg \frac{y_C}{x_C - x_j} + (-1)^j \arctg \frac{l_j}{r_0 + r_j}. \quad (16)$$

Після підстановки  $x_C, y_C, l_j$  та розкладу цього виразу (з точністю до першого степеня) в степеневий ряд по  $S$  встановлюється

$$\psi_j \cong \psi_{j0} + \xi_j S, \tag{17}$$

де

$$\xi_j = \frac{(x_0 - x_j) \sin \psi - y_0 \cos \psi + (-1)^{j-1} (r_0 + r_j) \lambda_j}{l_{j0}^2 + (r_0 + r_j)^2},$$

$$\psi_{j0} = \pi(j-1) + \arctg \frac{y_0 + l_0 \sin \psi}{x_0 + l_0 \cos \psi - x_j} + (-1)^{j-1} \arctg \frac{l_{j0}}{r_0 + r_j}, - \tag{18}$$

значення кутів  $\psi_j$  при  $S = 0$ , тобто при запасовці матеріалу без натягу.

Тоді довжина матеріалу, що контактує з робочою поверхнею компенсатора

$$l_3 = (\psi_{20} - \psi_{10} + (\xi_2 - \xi_1)S)r_0. \tag{19}$$

Розглянемо тепер силові співвідношення в системі. Рівняння руху її складових мають вигляд

$$\begin{cases} T_1 - I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - F_1 r_1 = 0, \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} m \frac{d^2 S}{dt^2} + cS + F_0 = F_1 \sin(\psi - \psi_1) + F_2 \sin(\psi_2 - \psi), \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} F_2 r_2 - T_2 - I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Тут  $I_1, I_2$  – моменти інерції провідного та веденого барабанів;  $\varphi_1, \varphi_2$  – кути повороту барабанів;  $t$  – час;  $F_1, F_2$  – зусилля натягу матеріалу між компенсатором та провідним і веденим барабанами відповідно;  $m$  – маса рухомої частини компенсатора;  $c$  – коефіцієнт жорсткості пружини;  $F_0$  – сила опору тертя в корпусі компенсатора.

Встановимо взаємозв'язок між  $F_1$  та  $F_2$ . Якщо хвостовик компенсатора виконано у формі циліндричної поверхні тертя, існує залежність Ейлера

$$F_1 = F_2 e^{f(\psi_2 - \psi_1)},$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя між матеріалом та робочою поверхнею хвостовика. З урахуванням (19)

$$F_1 = F_2 e^{(\psi_{20} - \psi_{10} + (\xi_2 - \xi_1)S)f},$$

$$F_1 = F_2 e^{f(\psi_{20} - \psi_{10})} (1 + (\xi_2 - \xi_1)fS). \tag{23}$$

Якщо хвостовик робочої частини виконано у формі ролика – система із зайвим ступенем вільності (зайва вільність – закон руху ролика). У такому разі зв'язок між  $F_1$  та  $F_2$  можна встановити через  $\eta$  – коефіцієнт корисної дії системи матеріал – ролик – опора ролика, ввівши в (24) умовний коефіцієнт тертя

$$\tilde{f} = \frac{1}{\pi} \ln(\eta^{-1}) \approx \frac{1}{\pi} \left( (1 - \eta) + \frac{(1 - \eta)^2}{2} + \dots \right). \tag{24}$$

Для таких роликів систем

$$\eta = \begin{cases} 0,92 \dots 0,94 & \text{при встановленні ролика в підшипниках ковзання;} \\ 0,94 \dots 0,96 & \text{при встановленні ролика в підшипниках кочення.} \end{cases}$$

З врахуванням (24) та (17) рівняння (21) має вигляд

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} + cS + F_0 - F_2 (a_0 + a_1 S + a_2 S^2) = 0, \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= -(v \sin(\psi - \psi_{10}) + \sin(\psi_{20} - \psi)); \\ a_1 &= -(\xi_2 \cos(\psi_{20} - \psi) - \xi_1 \cos(\psi - \psi_{10}) + f(\xi_2 - \xi_1)v \sin(\psi - \psi_{10})); \\ a_2 &= f\xi_1(\xi_2 - \xi_1)v \cos(\psi - \psi_{10}); \\ v &= e^{f(\psi_{20} - \psi_{10})}. \end{aligned}$$

Сила опору тертя в корпусі компенсатора залежить від конструктивного втілення опори

$$F_0 = \begin{cases} K \frac{dS}{dt} & \text{у разі в'язкого тертя в компенсаторі;} \\ f_0 (|R_0| + |R_H|) \text{sign} \left( \frac{dS}{dt} \right) & \text{у разі сухого тертя в опорі.} \end{cases} \quad (26)$$

Тут  $K$  – узагальнений коефіцієнт опору в'язкого тертя опори;  $f_0$  – коефіцієнт сухого тертя в опорі;  $R_0$ ,  $R_H$  – реакції в крайніх точках опори  $O$  і  $H$ .

Після знаходження  $R_0$  і  $R_H$  силу опору сухого тертя в опорах подаємо залежністю

$$F_0 = F_2 (b_0 + b_1 S + b_2 S^2 + b_3 S^3) \text{sign} \left( \frac{dS}{dt} \right), \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} b_0 &= \left( \frac{2l_0}{h} + 1 \right) \left( v \cos(\psi - \psi_{10}) - \cos(\psi_{20} - \psi) + \frac{r_0}{h} (1 - v) \right); \\ b_1 &= \left( \frac{2l_0}{h} + 1 \right) \left( \xi_1 v \sin(\psi - \psi_{10}) + \xi_2 \sin(\psi_{20} - \psi) + \frac{a_2}{\xi_1} \right) - \\ &\quad - f(\xi_2 - \xi_1)v \frac{r_0}{h} \pm \frac{1}{h} (v \cos(\psi - \psi_{10}) - \cos(\psi_{20} - \psi)); \\ b_2 &= \left( \frac{2l_0}{h} + 1 \right) f\xi_1(\xi_2 - \xi_1)v \sin(\psi - \psi_{10}) \pm \\ &\quad \pm \frac{2}{h} (v\xi_1 \sin(\psi - \psi_{10}) + \xi_2 \sin(\psi_{20} - \psi) + f(\xi_2 - \xi_1)v \cos(\psi - \psi_{10})); \\ b_3 &= \pm \frac{2}{h} f\xi_1(\xi_2 - \xi_1)v \sin(\psi - \psi_{10}); \end{aligned}$$

$h$  – відстань між краями опори (рис. 1).

Варіант сили опору в формі (28) – екстремальний і за раціонального конструювання та правильної експлуатації компенсатора малоїмовірний.

Особливості такого конструктивного виконання полягають в тому, що можливе заклинювання системи за певних співвідношень  $l_0$ ,  $h$  та  $S$ . Це може бути завданням окремого дослідження.

Враховуючи деформацію намотуваного елемента, можна встановити взаємозв'язок між переміщеннями елементів системи і силовими факторами в диференційній формі

$$r_1 d\varphi_1 - r_2 d\varphi_2 = \left( \begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 + r_0 (\xi_2 - \xi_1) + \frac{F_2}{\alpha} (v\lambda_1 (1 + f(\xi_2 - \xi_1)S) + \lambda_2) \\ &+ \frac{1}{\alpha} \frac{dF_2}{dS} (v l_{10} + l_{20} + (\lambda_2 + v f(\xi_2 - \xi_1)l_{10})S + v\lambda_1 f(\xi_2 - \xi_1)S^2) \end{aligned} \right) dS \quad (30)$$

Тут  $\alpha = A \cdot E$  – жорсткість поперечного перерізу матеріалу, що намотується;  $A$  – площа поперечного перерізу матеріалу;  $E$  – модуль пружності матеріалу.

Отже, математична модель динаміки намотувальної системи з поступальним компенсатором подається в формі системи рівнянь

$$T_1 - I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - F_2 v (1 + (\xi_2 - \xi_1) f S) r_1 = 0 \quad (20a)$$

та (22), (25) і (30).

Ця система рівнянь розв’язується за відповідних початкових умов, які, взагалі кажучи, залежать від характеру роботи системи. Динамічний процес як явище може нагадувати піднімання вантажу “з підхватом” і складатися з трьох етапів.

1. Якщо матеріал заведено із “слабиною”, тобто довжина запасованого матеріалу між барабанами  $L > l_{10} + l_{20} + l_{30}$ , спочатку рухається тільки провідний барабан згідно з рівнянням (20a) за нульових початкових умов:  $\varphi_1 = 0$ ,  $\frac{d\varphi_1}{dt} = 0$ ,  $F_2 = 0$  при  $t = 0$ . У зв’язку з короткочасністю процесу можна вважати  $T_1 = \text{const}$ , а тому наприкінці цього етапу

$$\varphi_1 = \frac{L - (l_{10} + l_{20} + l_{30})}{r_1}, \quad (31)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 = \sqrt{\frac{2(L - (l_{10} + l_{20} + l_{30}))T_1}{r_1 I_1}}. \quad (32)$$

Ці значення є початковими умовами другого етапу руху під час безперервного процесу, якщо був перший етап.

2. Другий етап – “завантаження” – існує, коли намотувальний матеріал запасований “без слабину”  $L = l_{10} + l_{20} + l_{30}$ . Впродовж етапу рухається провідний барабан і рухома частина компенсатора згідно з рівняннями (20a) і (25), а ведений барабан не рухається, доки зусилля  $F_2$  не досягне величини, здатної долати момент опору на веденім барабані, тобто  $F_2 \leq \frac{T_2}{r_2}$ .

Рівняння (20a) і (25) розв’язують за нульових початкових умов у разі відсутності першого етапу або при (31), (32) за його наявності.

За малих значень  $m \frac{d^2 S}{dt^2}$  і  $K \frac{dS}{dt}$  (26) та статичного навантаження кінцеве переміщення компенсатора на цьому етапі має значення

$$S_c = \left[ - \left( \frac{r_2 c}{T_2} + a_1 \right) + \sqrt{\left( \frac{r_2 c}{T_2} + a_1 \right)^2 - 4 a_0 a_2} \right] (2 a_2)^{-1}. \quad (33)$$

Очевидно, це значення є початковим переміщенням на початку руху всієї системи.

3. Рух всієї системи (третій етап) описується всією сукупністю залежностей (20a), (22), (25), (30).

Рівняння розв’язуються за початкових умов

$$\varphi_1 = 0; \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0; \quad \varphi_2 = 0; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = 0; \quad \frac{dS}{dt} = 0; \quad S = S_c \text{ при } t = 0, \text{ якщо система була завантажена}$$

статично. Початкова довжина консолі компенсатора  $l_{\pi} = l_0 \pm S_c$ . Це раціональніша схема запуску намотувальної системи.

При динамічному завантаженні (наявності другого чи першого та другого етапів) початкові умови: при  $t = 0$   $\varphi_2 = 0$ ;  $\frac{d\varphi_2}{dt} = 0$  та значення кінематичних параметрів  $\varphi_1$ ;  $\frac{d\varphi_1}{dt}$ ;  $\frac{dS}{dt}$ , знайдених за кінцевого значення  $S_c$  (33).

Як видно, система рівнянь динамічної моделі доволі громіздка, нелінійна і загалом важко піддається аналізу. Тому, враховуючи конструктивні міркування, наприклад, [3], будуть розглянуті можливості її спрощення зведення до загальноприйнятих схем.

**Висновки.** Розглянута відкрита намотувальна система з двома циліндричними барабанами, пружним намотувальним матеріалом і встановленим під довільним кутом до міжосьової лінії поступальним компенсатором. Такий підхід дає змогу одержати загальні залежності, а введення довільного нахилу компенсатора відкриває можливості розширення задачі для вивчення системи з комбінованим компенсатором.

Розглянуті різні випадки тертя матеріалу по робочій поверхні компенсатора.

Встановлені геометричні параметри системи (довжина ділянок намотувального матеріалу, кути контактних радіус-векторів барабанів та кути контакту робочої поверхні компенсатора з намотувальним матеріалом) у вигляді лінеаризованих залежностей від переміщення центра робочої поверхні компенсатора.

Диференційні рівняння руху барабанів та рухомої частини компенсатора зв'язують між собою кінематичні та силові параметри системи. Загальність постановки задачі створює можливості виконання поглибленого аналізу роботи системи.

1. Билибин К. И., Духанин А. М., Скороходов Е. А. *Намоточные работы в производстве элементов электроавтоматики.* – М.: Энергия, 1972. – 216 с. 2. А. с. 569517 СССР ГКИО. *Устройство для регулирования натяжения длинномерного материала* / Р.В. Матковский, С.В. Романов, В.Н. Винник, С.И. Крефиун, В.И. Чигирев, И.С. Лозовой. – Заявл. 03.05.75 (21); Опубл. 25.08.77. Бюл. № 31. – 3 с. 3. Будзан В.І. *Обґрунтування параметрів натяжної частини експериментальної установки для дослідження відкритої намотувальної системи з компенсатором* // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2001. – № 434. – С. 10–16.