УДК 534.111

А.І. Андрухів*, М.Б. Сокіл**
Національний університет "Львівська політехніка",
*****кафедра соціальних комунікацій та інформаційної діяльності,
******кафедра транспортних технологій

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ПРИВОДУ

Запропоновано методику дослідження впливу нелінійних сил на згинні коливання гнучких елементів систем приводу. В її основу покладено: а) принцип одночастотності коливань у нелінійних системах; б) хвильову теорію руху; в) узагальнення на основі наведеного асимптотичного методу Крилова–Боголюбова–Митропольського (КБМ) на нові класи динамічних систем. Сукупно це дає змогу отримати двопараметричну множину розв'язків, які визначають вплив на динамічний процес швидкості поздовжнього руху та фізико-механічні характеристики гнучких елементів систем.

The paper proposes a method of studying the influence of nonlinear forces on the bending vibration of the flexible elements of matter. It is based on: a) the principle of onefrequency oscillations in nonlinear systems, b) the wave theory of motion, c) generalization on the asymptotic method of Krylov-Bogoliubov-Mitropol'ski (KBM) for new classes of dynamical systems. It provides a two-parameter set of solutions that determine the impact on the dynamic process of the longitudinal velocity of motion and physical-mechanical characteristics of flexible elements of the systems.

Актуальність та огляд основних результатів досліджень. У межах лінійної теорії коливань не вдається пояснити багато явищ, які відбуваються у реальних коливальних системах. Математичний апарат дослідження нелінійних моделей систем розподіленими параметрами розроблений порівняно повно тільки для так званих квазілійних систем [1–4] обмеженої довжини, частково для систем із степеневою нелінійністю та близьких до них [5, 6]. Для таких систем на основі загальних ідей методів збурень [7, 8] чи їхніх модифікацій [4, 9] вдається побудувати асимптотичні наближення, які достатньо адекватні динамічному процесу. Що стосується суцільних середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом (йдеться насамперед про канатні витяги, гнучкі робочі елементи систем приводу й транспортування, певною мірою гусеничні обводи тощо), то вони залишаються малодослідженими через відсутність досконалого апарата аналізу їх математичних моделей. У той самий час вони широко застосовуються через простоту використання та порівняльну дешевизну під час виготовлення. У зв'язку із вказаним в останні десятиліття аналітичні дослідження різних моделей цих систем набули нового імпульсу розвитку (див., наприклад, [10–20]). Здебільшого моделі поздовжньо-рухомих середовищ (одновимірних чи двовимірних) розглядались за умови, що їх згинною жорсткістю можна знехтувати. Однак таке спрощення фізичних, а значить і відповідних їм математичних моделей призводить до певних неточностей визначення основних параметрів, які характеризують процес загалом. Урахування ж згинної жорсткості у поздовжньо-рухомих середовищах приводить до побудови якісно нових математичних моделей, а знаходження відповідних їм аналітичних розв'язків, які б давали можливість всебічно проаналізувати процес, є складною математичною задачею. Це означає, що проблема аналітичного дослідження динамічних процесів систем, які характеризуються поздовжнім рухом із урахуванням їх згинної жорсткості, залишається відкритою. Для часткового її вирішення у роботі пропонується підхід, основна ідея якого полягає у такому: зберігши основну сутність фізичного процесу, дещо поступитись строгістю математичної постановки задачі з метою отримання порівняно нескладних, але в той самий час доволі адекватних фізичному процесу співвідношень. Такий підхід для багатьох випадків є виправданим і одночасно є одним із можливих способів дослідження складних динамічних систем. У цій роботі під час дослідження згинних коливань гнучких елементів привідних систем пропонується не зовсім строге формулювання крайових умов у математичній моделі. Це в кінцевому рахунку дає можливість узагальнити на досліджуваний випадок розроблену й апробовану для гнучких елементів привідних систем малої згинної жорсткості [11, 13, 14] теорію хвильового руху. Зауважимо, що аналітичні дослідження динамічних процесів поздовжньо-рухомих систем, в основу яких покладено поєднання методів Бубнова – Гальоркіна [18–20] та асимптотичні методи нелінійної механіки [4], є, на наш погляд, менш точним, ніж запропонований у роботі підхід. Це підтверджується хоча б тим, що навіть для систем малої згинної жорсткості за їх допомогою не вдається пояснити низку характерних особливостей поздовжньо-рухомих систем [11].

Постановка задачі. Відомо [18–20], що диференціальне рівняння, яке описує нелінійні згинні коливання одновимірної моделі гнучких привідних елементів за умов сталої швидкості їх поздовжнього руху V та рівномірного розподілу маси вздовж усієї довжини можна привести до вигляду

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - \left(\alpha^2 - V^2\right)u_{xx} + \beta^2 u_{xxxx} = \varepsilon f\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}\right), \tag{1}$$

де (1) $u(x,t)$ – функція, яка описує відхилення від рівноважного положення нейтральної осі гнучкого елемента із ейлеровою координатою x у довільний момент часу t, $\alpha^2 = T/\rho$; ρ – маса одиниці довжини привідного елемента; T – величина сили попереднього його натягу; $\beta^2 = EI/\rho$; E – модуль пружності матеріалу; I – момент інерції поперечного перерізу стосовно нейтральної осі (EI – згинна жорсткість); $f\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}\right)$ – відома аналітична функція, яка враховує відхилення пружних властивостей матеріалу від лінійного закону, силу опору та інші нелінійні сили. Малий же параметр у правій частині наведеного рівняння вказує на таке: максимальне значення нелінійних сил порівняно із $\left|\alpha^2\right|$ та $\left|\beta^2\right|$ є величиною порядку ε. Наведене є лише необхідною умовою застосування методів збурень [3, 6–9] для дослідження нелінійних систем. Їх достатньо ефективно використовують за умови, коли вдається побудувати розв’язок незбуреного рівняння. У нашому випадку – це лінійне рівняння, яке містить змішану похідну лінійної та часової змінних, тобто

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - \left(\alpha^2 - V^2\right)u_{xx} + \beta^2 u_{xxxx} = 0\,. \tag{2}$$

Із знаходженням розв’язку саме цього рівняння пов’язані основні проблеми дослідження динамічних процесів у одновимірних моделях поздовжньо-рухомих середовищ. До того ж динамічний процес у них істотно залежить від крайових умов (способу закріплення) і точно їх задовольнити не завжди вдається. У багатьох випадках під час розгляду прикладних задач поступаються строгістю їх формулювань, зберігши при цьому сутність фізичного процесу. Саме такий алгоритм пропонується під час розв’язання поставленої задачі. Для рівняння (1) долучаємо найпростіші однорідні крайові умови:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0. \tag{3}$$

Отже, для аналітичного дослідження згинних коливань гнучких елементів привідних систем необхідно побудувати розв’язок рівняння (1) за крайових умов (3).

Методика розв’язування. В основу побудови розв’язку вказаних задач покладено: принцип одночастотності коливань у нелінійних системах із багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами [4, 9]; основну ідею хвильової теорії руху, яка у [11, 13, 14] трансформована стосовно поперечних коливань гнучких елементів привідних систем, жорсткістю яких можна знехтувати; розвиток на основі асимптотичних методів КБМ [9] на нові класи динамічних систем. Отже, пропонуємо описати процес у вигляді асимптотичного ряду:

$$u(x,t) = a\left(\cos(\kappa x + \omega t + \varphi) + \delta\cos(\chi x - \omega t + \psi)\right) + \sum_{i=1} \varepsilon^i W_i(a, x, \phi), \tag{4}$$

де a, κ, χ, φ, ψ – відповідно амплітуда, хвильові числа, початкові фази прямої та відбитої хвиль; ω – їх частота; $W_i(a, x, \phi)$ – невідомі функції, які враховують вплив нелінійних сил на динамічний процес і вони у подальшому приймаються 2π-періодичними по $\phi=\omega t+\varphi$ та задовольняють крайові умови, які випливають із (3). Для знаходження усієї множини параметрів та невідомі функції використаємо загальну теорію асимптотичного інтегрування нелінійних систем. Відповідно до неї спочатку розглянемо *незбурене рівняння* (2). Воно встановлює зв'язок між основними параметрами прямої та відбитої хвиль у вигляді дисперсійних співвідношень:

$$\omega^2+2V\kappa\omega-\left(\alpha^2-V^2\right)\kappa^2-\beta^2\kappa^4=0, \qquad \omega^2-2V\chi\omega-\left(\alpha^2-V^2\right)\chi^2-\beta^2\chi^4=0. \tag{5}$$

Одночасно із крайових умов (3) випливає, що

$$\cos(\omega t+\varphi)+\delta\cos(-\omega t+\psi)=0, \quad \cos(\kappa l+\omega t+\varphi)+\delta\cos(\chi l-\omega t+\psi)=0. \tag{6}$$

Наведені залежності мають справджуватись для довільного значення t, тому хвильові числа κ, χ додатково пов'язані співвідношенням

$$\kappa+\chi=2k\pi/l, \tag{7}$$

а початкові ж фази – $\varphi=-\phi$. Що стосується амплітуд хвиль, то вони є однаковими ($\delta=-1$).

Примітки:

1. Крайові задачі для рівняння (2), які розглядаються, є лінійними однорідними, тому на основі отриманого легко записати їх загальний розв'язок. Множина ж параметрів $\{a\}$та $\{\varphi\}$ для вказаного випадку визначається із початкових умов. Така задача може бути предметом окремих досліджень.

Збурене рівняння. Що стосується впливу нелінійних сил на закони зміни основних параметрів хвиль, то нижче розглядатимемо лише так званий випадок "коротких" систем, для якого параметри a і φ є функціями часу. Закони зміни їх задаватимемо звичайними диференціальними рівняннями

$$\dot{a}=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2A_2(a)+\ldots, \qquad \dot{\varphi}=\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2B_2(a)+\ldots, \tag{8}$$

з невідомими правими частинами, які, тобто їхні функції $A_1(a), B_1(a), A_2(a), B_2(a),\ldots$, визначаються так, щоб асимптотичне подання (5) з необхідним ступенем точності задовольняло вихідному рівнянню (1), якщо у ньому на місце a і φ підставити функції часу, визначені цими рівняннями. Останнє є основою для зв'язку між невідомими функціями та правою частиною рівняння (1):

$$L(W_i)=f_i(a,x,\phi)+\Delta_1(x)\left(A_i(a)\cos\phi-aB_i(a)\sin\phi\right)+\Delta_2(x)\left(A_i(a)\sin\phi+aB_i(a)\sin\phi\right), \tag{9}$$

де $$L(U_i)=\omega^2\frac{\partial^2W_i(a,x,\phi)}{\partial\phi^2}+2V\omega\frac{\partial^2W_i(a,x,\phi)}{\partial x\partial\phi}-\left(\alpha^2-V^2\right)\frac{\partial^2W_i(a,x,\phi)}{\partial^2x}+\beta^2\frac{\partial^4W_i(a,x,\phi)}{\partial x^4}, \quad \phi=\omega t+\varphi,$$

$$\Delta_1(x)=(\omega+\kappa V)\sin\kappa x+(\omega-\chi V)\sin\chi x, \qquad \Delta_2(x)=(\omega+\kappa V)\cos\kappa x-(\omega-\chi V)\cos\chi x,$$

$f_i(a,x,\phi)$ – виражаються через праву частину рівняння (1), зокрема:

$$f_1(a,x,\phi)=f\left(u,u_t,u_x,u_{xx},u_{xxx}\right)\Big|_{\substack{u=a\left(\cos(\kappa x+\omega t+\varphi)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi)\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ u_{xxx}=-a\left(\kappa^3\sin(\kappa x+\omega t+\varphi)+\delta\chi^3\sin(\chi x-\omega t+\psi)\right)}},$$

$$f_2(a,x,\phi)=W_1(a,x,\phi)\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{u=a\left(\cos(\kappa x+\omega t+\varphi)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi)\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ u_{xxx}=-a\left(\kappa^3\sin(\kappa x+\omega t+\varphi)+\delta\chi^3\sin(\chi x-\omega t+\psi)\right)}}+\frac{\partial W_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x}\Big|_{\substack{u=a\left(\cos(\kappa x+\omega t+\varphi)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi)\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ u_{xxx}=-a\left(\kappa^3\sin(\kappa x+\omega t+\varphi)+\delta\chi^3\sin(\chi x-\omega t+\psi)\right)}}+$$

$$+\frac{\partial^2W_1}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial u_{xx}}\Big|_{\substack{u=a\left(\cos(\kappa x+\omega t+\varphi)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi)\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ u_{xxx}=-a\left(\kappa^3\sin(\kappa x+\omega t+\varphi)+\delta\chi^3\sin(\chi x-\omega t+\psi)\right)}}+\frac{\partial^3W_1}{\partial x^3}\frac{\partial f}{\partial u_{xxx}}\Big|_{\substack{u=a\left(\cos(\kappa x+\omega t+\varphi)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi)\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ u_{xxx}=-a\left(\kappa^3\sin(\kappa x+\omega t+\varphi)+\delta\chi^3\sin(\chi x-\omega t+\psi)\right)}}-$$

$$-2\omega A_1(a)\frac{\partial^2W_1}{\partial a\partial\phi}-2\omega B_1(a)\frac{\partial^2W_1}{\partial\phi^2}+$$

$$+\left(aB_1^2(a)-A_1(a)\frac{dA_1}{da}\right)\left(\cos(\kappa x+\phi)-\cos(\chi x-\phi)\right)+\left(2A_1(a)B_1(a)+aA_1(a)\frac{dB_1}{da}\right)\left(\sin(\kappa x+\phi)+\sin(\chi x-\phi)\right).$$

До того ж невідомі функції $W_i(a,x,\phi)$ повинні задовольняти крайові умови:

$$W_i(a,x,\phi)_{|x=0} = W_i(a,x,\phi)_{|x=l} = 0. \qquad (10)$$

З урахуванням лінійності диференціальних рівняння (9), їх розв'язок шукатимемо у вигляді

$$W_i(a,x,\phi) = U_j(a,x,\phi) + R_j(a,x,\phi). \qquad (11)$$

Нехай функції $W_i(a,x,\phi)$ є частинними розв'язками неоднорідних рівнянь:

$$L(U_i) = f_i(a,x,\phi) + \Delta_1(x)(A_i(a)\cos\phi - aB_i(a)\sin\phi) + \Delta_2(x)(A_i(a)\sin\phi + aB_i(a)\sin\phi), \qquad (12)$$

а функції $R_j(a,x,\phi)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$L(R_i(a,x,\phi)) = 0. \qquad (13)$$

Крайові умови (10) справджуватимуться, якщо існуватимуть залежності:

$$R_i(a,x,\phi)_{|x=0} = -U_i(a,x,\phi)_{|x=0},\ \ R_i(a,x,\phi)_{|x=l} = -U_i(a,x,\phi)_{|x=l}. \qquad (14)$$

Для визначення із диференціальних рівнянь (12) залежностей $A_i(a), B_i(a)$, що описують вплив нелінійних сил на закони зміни основних параметрів хвиль, накладемо на невідомі функції $U_i(a,x,\phi)$ додаткові умови, а саме: вони не повинні містити у своїх розкладах доданків, пропорційних першим гармонікам ϕ. Наведене існуватиме, якщо ці функції задовольняють умови:

$$\int_0^{2\pi} U_i(a,x,\phi)\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix} d\phi = 0. \qquad (15)$$

Це дасть змогу отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка пов'язує невідомі функції $A_i(a), B_i(a)$ і для першого має такий вигляд:

$$f_1^s(a,x) - a\Delta_1(x)B_1(a) + \Delta_2(x)A_1(a) = 0, \qquad f_1^c(a,x) + \Delta_1(x)A_1(a) + a\Delta_2(x)B\ (a) = 0. \qquad (16)$$

У вищенаведених залежностях відомі функції $f_1^s(a,x)$, $f_1^c(a,x)$ виражаються через праву частину рівняння (12) у вигляді

$$f_1^s(a,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a,x,\phi)\sin\phi d\phi, \quad f_{i1}^c(a,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_i(a,x,\phi)\cos\phi d\phi. \qquad (17)$$

Система алгебраїчних рівнянь (16) визначає невідомі функції $A_1(a), B_1(a)$:

$$A_1(a) = \frac{\varepsilon}{l\left[(\omega+\kappa V)^2 + (\omega-\chi V)^2\right]}\int_0^l \left(f_1^c(a,x)\Delta_1(x) + f_1^s(a,x)\Delta_2(x)\right)dx,$$

$$B_1(a) = \frac{\varepsilon}{l\left[(\omega+\kappa V)^2 + (\omega-\chi V)^2\right]a}\int_0^l \left(f_1^s(a,x)\Delta_1(x) - f_1^c(a,x)\Delta_2(x)\right)dx. \qquad (18)$$

2. Отримані рівняння (18), які описують для першого наближення вплив нелінійних сил на динамічний процес, за своїм виглядом ідентичні для будь-якого наближення. Уся різниця полягає у значеннях функцій $f_i(a,x,\phi)$. Якщо для першого наближення $f_1(a,x,\phi)$ виражається через праву частину рівняння (1) та розв'язок незбуреного рівняння, то для i-го наближення – додатково ще через $W_1(a,x,\phi), A_1(a), B_1(a),\ W_2(a,x,\phi),\ A_2(a), B_2(a),...,\ W_{i-1}(a,x,\phi), A_{i-1}(a), B_{i-1}(a)$.

Враховуючи наведене, зупинимось тільки на методиці знаходження першого поліпшеного наближення, тобто на методиці знаходження функцій $U_1(a,x,\phi)$ та $R_1(a,x,\phi)$. Зупинимось спочатку на способі знаходження функції $U_1(a,x,\phi)$. З урахуванням того, що функція $U_1(a,x,\phi)$ є періодичною по ϕ з періодом 2π, представимо її у вигляді

$$U_1(a,x,\phi) = \sum_{m=1}\sum_{j=0, j\neq 1}\left[\left(U_{1jm}^{ss}(a)\sin\frac{mx}{l} + U_{1jm}^{sc}(a)\cos\frac{mx}{l}\right)\sin j\phi + \left(U_{1jm}^{cs}(a)\sin\frac{mx}{l} + U_{1jm}^{cc}(a)\cos\frac{mx}{l}\right)\cos j\phi\right]. \qquad (19)$$

Подібно представляємо і відому функцію $f_1(a,x,\phi)$ у вигляді

$$f_1(a,x,\phi)=\sum_{m=1}\sum_{j=0}\left[\left(f_{1jm}^{ss}(a)\sin\frac{mx}{l}+f_{1jm}^{sc}(a)\cos\frac{mx}{l}\right)\sin j\phi+\left(f_{1jm}^{cs}(a)\sin\frac{mx}{l}+f_{1jm}^{cc}(a)\cos j\phi\right)\cos\frac{mx}{l}\right]. \quad (20)$$

Із диференціального рівняння (12), враховуючи (19), отримаємо співвідношення для визначення невідомих коефіцієнтів $U_{1jm}^{sc}(a)$, $U_{1jm}^{ss}(a)$, $U_{1jm}^{cc}(a)$, $U_{1jm}^{cs}(a)$:

$$\lambda U_{1jm}^{sc}(a)+2j\omega\frac{m}{l}U_{1jm}^{cs}(a)=-f_{1jm}^{sc}(a),\ \ \lambda U_{1jm}^{ss}(a)-2j\omega\frac{m}{l}U_{1jm}^{cc}(a)=-f_{1jm}^{ss}(a),$$

$$\lambda U_{1jm}^{cs}(a)+2j\omega\frac{m}{l}U_{1jm}^{sc}(a)=-f_{1jm}^{cs}(a),\ \lambda U_{1jm}^{cc}(a)-2j\omega\frac{m}{l}U_{1jm}^{ss}(a)=-f_{1jm}^{cc}(a)\,. \quad (21)$$

Наведена система алгебраїчних рівнянь (21) визначає невідомі коефіцієнти розкладу функції $U_1(a,x,\phi)$:

$$U_{1jm}^{sc}(a)=-\frac{1}{\Delta^*}\left(2j\omega\frac{m}{l}f_{1jm}^{cs}(a)+\lambda f_{1jm}^{sc}(a)\right),\ U_{1jm}^{cs}(a)=-\frac{1}{\Delta^*}\left(2j\omega\frac{m}{l}f_{1jm}^{sc}(a)+\lambda f_{1jm}^{cs}(a)\right),$$

$$U_{1jm}^{ss}(a)=-\frac{1}{\Delta^*}\left(2j\omega\frac{m}{l}f_{1jm}^{cc}(a)+\lambda f_{1jm}^{ss}(a)\right),\ U_{1jm}^{cc}(a)=-\frac{1}{\Delta^*}\left(2j\omega\frac{m}{l}f_{1jm}^{ss}(a)+\lambda f_{1jm}^{cc}(a)\right). \quad (22)$$

У співвідношеннях (22) введено такі позначення:

$$\Delta^*=\lambda^2-\left(2j\omega\frac{m}{l}\right)^2,\ \lambda=\left[j^2\omega^2-\left(\alpha^2-V^1\right)\left(\frac{mx}{l}\right)^2-\beta^2\left(\frac{m}{l}\right)^4\right],$$

$$f_{1jm}^{sc}(a)=\frac{1}{\pi l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}f_i(a,x,\phi)\sin j\phi\cos\frac{mx}{l}dxd\phi,\ \ f_{1jm}^{cc}(a)=\frac{1}{\pi l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}f_i(a,x,\phi)\cos j\phi\cos\frac{mx}{l}dxd\phi,$$

$$f_{1jm}^{ss}(a)=\frac{1}{\pi l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}f_i(a,x,\phi)\sin j\phi\sin\frac{mx}{l}dxd\phi,\ \ f_{1jm}^{cs}(a)=\frac{1}{\pi l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}f_i(a,x,\phi)\cos j\phi\sin\frac{mx}{l}dxd\phi.$$

Визначивши функцію $U_1(a,x,\phi)$, перейдемо до знаходження функції $R_1(a,x,\phi)$. Як було сказано вище, вона повинна бути розв'язком однорідного диференціального рівняння (13) та задовольняти крайові умови (14). Із урахуванням вищенаведеного вони набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}R_1(a,x,\phi)_{|x=0}&=-\sum_{m=1}\sum_{j=0,\,j\neq1}\left(U_{1jm}^{sc}(a)\sin j\phi+U_{1jm}^{cc}(a)\cos j\phi\right),\\ R_1(a,x,\phi)_{|x=l}&=-\sum_{m=1}(-1)^m\sum_{j=0,\,j\neq1}\left(U_{1jm}^{sc}(a)\sin j\phi+U_{1jm}^{cc}(a)\cos j\phi\right).\end{aligned} \quad (23)$$

За своєю структурою диференціальне рівняння (13) аналогічне до рівняння (2), тому його загальний розв'язок має такий вигляд:

$$R_1(a,x,\phi)=\sum_{j,\,j\neq1}\left[C_{1j}^s(a)\cos\left(H_jx+\Omega_j\phi+\varphi_{0j}\right)+C_{1j}^c(a)\cos\left(X_jx-\Omega_j\phi+\psi_{0j}\right)\right]. \quad (24)$$

У представленні (24) параметри H_j, X_j, Ω_j пов'язані дисперсійними співвідношеннями

$$\begin{aligned}&\omega^2\Omega_j^2+2\Omega_j\omega VH_j-\left(\alpha^2-V^2\right)H_j^2-\beta^2H_j^4=0,\\ &\omega^2\Omega_j^2-2\Omega_j\omega VX_j-\left(\alpha^2-V^2\right)X_j^2-\beta^2X_j^4=0,\end{aligned} \quad (25)$$

а спосіб визначення величин $C_{1j}^s(a), C_{1j}^c(a)$, φ_{0j} та ψ_{0j} буде вказаний нижче.

Із дисперсійних співвідношень (26) знаходимо

$$\Omega_j=\frac{1}{2V\omega}\left[\alpha^2-V^2+\beta^2\left(H_j-X_j\right)\left(H_j^2+X_j^2\right)\right]. \quad (26)$$

Зіставляючи залежності (23), (24), (26), доходимо висновку, що необхідною умовою виконання крайових умов (23) є:

$$\beta^2\left(H_j-X_j\right)\left(H_j^2+X_j^2\right)=2V\omega j-\alpha^2+V^2\,. \quad (27)$$

З урахуванням наведеного із (25) отримаємо систему рівнянь, що пов'язує невідомі параметри $C_{1j}^{s}(a), C_{1j}^{c}(a)$, φ_{0j}, ψ_{0j}, H_j та X_j:

$$C_{1j}^{s}(a)\cos\varphi_{0j} + C_{1j}^{c}(a)\cos\psi_{0j} = -\sum_m U_{1jm}^{cc}(a),\; C_{1j}^{s}(a)\sin\varphi_{0j} - C_{1j}^{c}(a)\sin\psi_{0j} = \sum_m U_{1jm}^{sc}(a),$$

$$C_{1j}^{s}(a)\cos\left(H_j l + \varphi_{0j}\right) + C_{1j}^{c}(a)\cos\left(X_j l - \psi_{0j}\right) = \sum_m (-1)^{m+1} U_{1jm}^{cc}(a),$$

$$C_{1j}^{s}(a)\sin\left(H_j l + \varphi_{0j}\right) + C_{1j}^{c}(a)\cos\left(X_j l - \psi_{0j}\right) = \sum_m (-1)^{m} U_{1jm}^{sc}(a). \tag{28}$$

Додатково враховуючи одну залежність із дисперсійних співвідношень (25) та умову (27), знаходимо невідомі величини $C_{1j}^{s}(a), C_{1j}^{c}(a)$, φ_{0j}, ψ_{0j}, H_j та X_j. Нижче, на рис. 1, 2 показано відповідно залежності власної частоти коливань ω та критичної швидкості руху від параметрів системи, а на рис. 3 – закон зміни у часі амплітуди процесу, за умови, що $\varepsilon f(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = -\delta u_t + \lambda (u_x)^2 u_{xx}$ та таких значень параметрів $\alpha = 13,\ \delta = -1,\ \lambda = 20$.

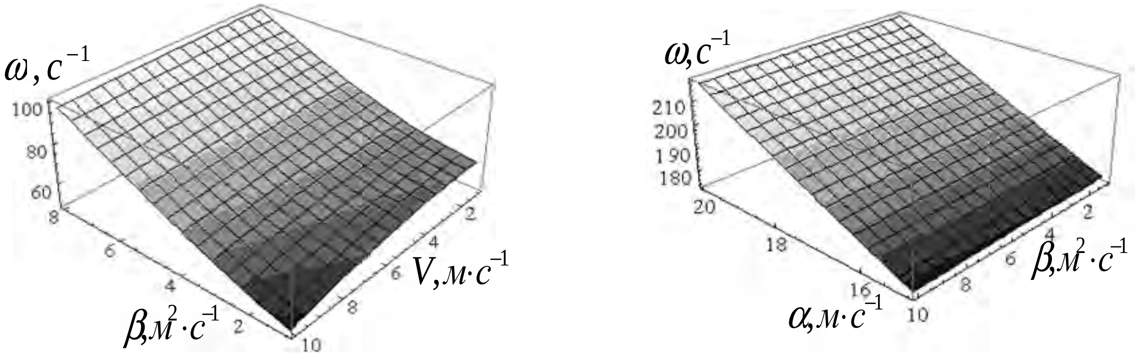

Рис. 1. Залежність частоти власних коливань від параметрів α, β *та* V

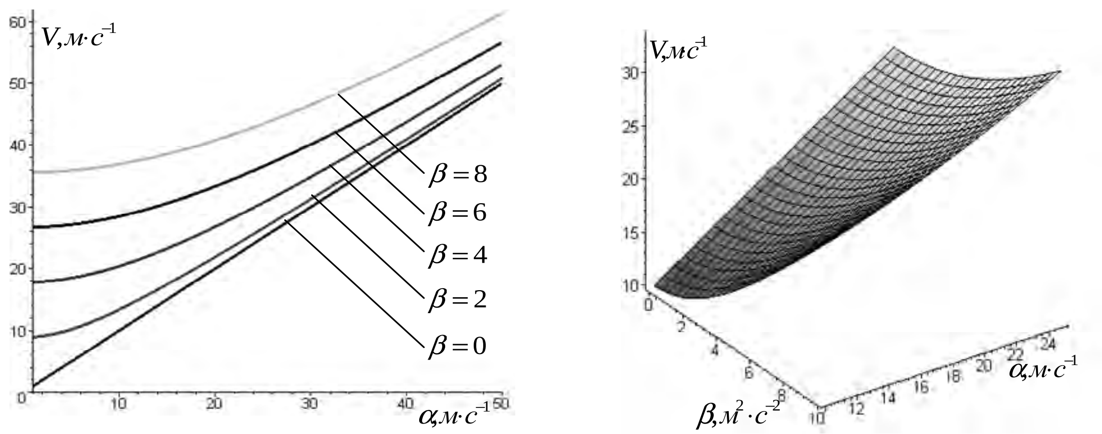

Рис. 2. Залежність критичної швидкості руху від параметрів α, β *та* V

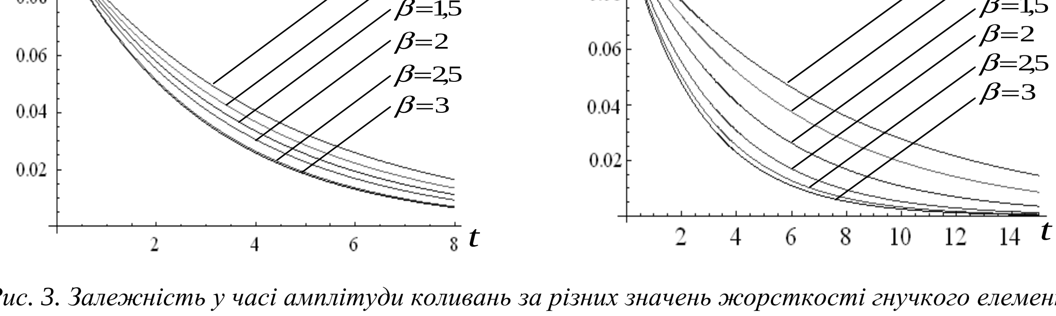

Рис. 3. Залежність у часі амплітуди коливань за різних значень жорсткості гнучкого елемента

Висновки. Розроблена методика аналітичного дослідження згинних коливань гнучких елементів показує, що нехтування жорсткістю останніх у розрахункових моделях призводить до значних неточностей визначення основних характеристик динамічного процесу. Зокрема, отримані результати показують: а) для більших швидкостей поздовжнього руху власна частота згинних коливань є меншою; б) хвильове число прямої хвилі для більших значень швидкості поздовжнього руху та згинної жорсткості є більшим, а відбитої, навпаки, – меншим; в) із збільшенням жорсткості власна частота коливань зростає; г) за швидкості поздовжнього руху $V = \sqrt{\alpha^2 + 0{,}5\left(k\pi l^{-1}\beta\right)^2}$ відбувається зрив коливань. Одночасно потрібно відзначити, що викладені результати можуть бути основою для складніших досліджень – аналізу впливу на поздовжньо-рухомі системи періодичних сил.

1. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.П. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с. 2. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 560 с. 3. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 501 с. 4. Сокил Б.И. О построении асимптотических приближений для неавтономного волнового уравнения / Б.И. Сокил // Укр. мат. журн. – 1995. – № 12 (47). – С. 1714–1716. 5. Сокил Б.И. Построение одночастотных решений некоторых краевых задач для неавтономного волнового уравнения / Б.И. Сокил // Укр. мат. журн. – 1994. – № 9 (46). – С. 1275–1279. 6. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Джулиан Коул [пер. с англ. А.И. Державиной и В.Н. Диесперова; под ред. О.С. Рыжова]. – М.: Мир, 1972. – 276 с. 7. Найфе А.Х. Методы возмущений / А.Х. Найфе. – М.: Мир, 1976. – 456 с. 8. Митропольский Ю.А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков. – К.: Вища шк., 1976. – 589 с. 9. Веренев В.В. Влияние скорости захвата полосы на динамические нагрузки в приводе прокатной клети / В.В. Веренев, В.И. Большаков, Н.И. Подобедов // Фундаментальные и прикладные проблемы черной металлургии: сб. научн. тр. ИЧМ. – 2007. – Вып.14. – С.260–266. 10. Вікович І. А. Поздовжні коливання рухомої стрічки з урахуванням розсіяння енергії в матеріалі / І. А Вікович, Х. А. Висоцька // Вібрації в техніці та технологіях. – 2005. – № 3(40). – С. 13–17. 11. Сокіл М.Б. Згинні коливання гнучких елементів систем приводів і структура розв'язку їх математичних моделей / М.Б. Сокіл // Вісник НЛТУ України". – 2012. − Вип. 22.1. − С. 144–147. 12. Доценко П. Д. О колебаниях и устойчивости прямолинейного трубопровода / П.Д. Доценко // Прикладная механика. – 1971. – Вип. 3. – С. 85–91. 13. Хитряк О. Асимптотичний метод у дослідженні впливу періодичних сил на нелінійні коливання гнучких елементів приводу / О. Хитряк, М. Сокіл // Вісник НУ "Львівська політехніка" „Динаміка, міцність та проектування машин і приладів". – 2011. – Вип. 45. – С. 57–61. 14. Хитряк О.І. Резонансні коливання двовимірних гнучких елементів систем приводу та транспортування, що взаємодіють із зовнішнім середовищем / О.І. Хитряк, М.Б. Сокіл, Ю.А. Сеник // Зб. наук.-техн. пр. „Науковий вісник НЛТУ України". – 2011. – Вип. 21.5. – С. 331–335. 15. Chen L.Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings / L.Q. Chen // Appl. Mech. Rev. – 2005.– Volume 58.2. – P. 91–116. 16. Chen L.Q. Dynamic stability of an axially moving viscoelastic beam / L.Q. Chen, X.D. Yang, C.J. Cheng // European journal of mechanics a solids. – 2004. – Volume 23. – P. 659–666.17. Fung R.F. Non–linear dynamic analysis of the viscoelastic string with a harmonically varying transport speed / R.F. Fung, J.S. Huang, Y.C. Chen // Computers & Structures. – 1998 – № 66(6). – P. 777–784. 18. Сокіл М.Б. Згинні нелінійні коливання одновимірних тіл, які характеризуються поздовжньою швидкістю руху, і наближене їх дослідження/ Сокіл М.Б./ Вісник НУ "ЛП" Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – 2010. – № 678. – С. 97–102. 19. Chen L.Q. Dynamic stability of an axially moving viscoelastic beam / L.Q. Chen, X.D. Yang, C.J. Chng // European journal of mechanics a solids. – 2004. – Volume 23. – P. 659–666. 20. Chen L.Q. Nonlinear parametric vibration of axially moving beams:asymptotic analysis and differential quadrature verification / Li-Qun Chen, Bo Wang, Hu Ding // Journal of Physics: Conference Series 181 (2009). – P. 1–8.