УДК 528.33:551.24

НОВИЙ ПІДХІД ДО ВИКОРИСТАННЯ СТОКСОВИХ СТАЛИХ ДЛЯ ПОБУДОВИ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ПОХІДНИХ РОЗПОДІЛІВ МАС ПЛАНЕТ

П. Черняга, М. Фис

Національний університет “Львівська політехніка”

Ключові слова: стоксові сталі, функція, планета.

Постановка проблеми

Для повнішого використання даних про гравітаційне поле планети потрібно створити нові математичні методи для їх обробки. Це дає можливість будувати не тільки модельні розподіли густини δ, вищої від другого, а і похідні від неї, що, своєю чергою, дає змогу детальніше проводити дослідження внутрішньої структури небесних тіл.

Зв’язок з важливими науковими і практичними завданнями

Спосіб отримання похідних на основі експериментальних даних відкриває нові можливості для дослідження внутрішньої будови планет, зокрема перевірки достовірності гіпотези про виконання умови $\dfrac{d\delta}{dz} \geq 0$ (z-глибина) для розподілів мас планетарних тіл [1]. Функцію розподілу мас δ, отриману таким способом, потім можна використати як початкову ітерацію в наближених методах для подальшого уточнення.

Невирішені аспекти загальної проблеми

Через громіздкість знайдених формул поки що не можна встановити загального алгоритму збільшення порядку апроксимації, а через відсутність рекурентних співвідношень для W^i_{mnk} – автоматизувати процес їх обчислення.

Постановка завдання

На основі даних про гравітаційне поле планети і динамічного стиснення H побудувати наближену функцію розподілу мас та її похідних у вигляді суми багаточленів W^i_{mnk} до четвертого порядку включно.

Виклад основного матеріалу дослідження

У роботах [2, 3] наведено метод наближеного визначення функції розподілу мас та її похідних із залученням стоксових сталих до четвертого порядку включно, реалізація якого в поданому вигляді практично неможлива. Для виконання такої задачі для співвідношень

$$C_{nk} = \frac{1}{Ma^n}\int_\tau \delta U_{nk}\, d\tau\,, \tag{1}$$

$$S_{nk} = \frac{1}{Ma^n}\int_\tau \delta V_{nk}\, d\tau\,, \tag{2}$$

де U_{nk}, V_{nk} – кульові функції; $\cos\alpha_i$ – координати вектора нормалі до поверхні σ.

Скористаємось тотожністю [2]

$$\int_\tau \varphi \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau = -\int_\tau \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\tau + \iint_\sigma \varphi\delta \cos\alpha_i\, d\sigma\,. \tag{3}$$

Одержимо

$$C_{nk} = \frac{1}{Ma^n}\left\{-\int_\tau \frac{\partial \delta}{\partial x_i} U^i_{nk}\, d\tau + \iint_\sigma \delta U^i_{nk}\, d\sigma\right\} \tag{4}$$

$$S_{nk} = \frac{1}{Ma^n}\left\{-\int_\tau \frac{\partial \delta}{\partial x_i} V^i_{nk}\, d\tau + \iint_\sigma \delta V^i_{nk}\, d\sigma\right\}, \tag{5}$$

тут

$$U^i_{nk} = \int_0^{x_i} U_{nk}\, dx_i\,,\ V^i_{nk} = \int_0^{x_i} V_{nk}\, dx_i$$

(a – екваторіальний радіус), (6)

$$\text{похідні}\ \frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \frac{1}{a_i}\sum_{N=m+n+k=0}^{\infty} a^i_{mkk} W_{mnk}\left(x_1 x_2 x_3\right), \tag{7}$$

a^i_{mnk} – коефіцієнти розкладу [4], які є лінійною комбінацією степеневих моментів I_{pas} густини мас $\left(p+q+s \leq N-1\right)$ і величин [2, 3] (степеневих поверхневих моментів густини δ)

$$\sigma_{pqs} = \frac{1}{M}\iint_\sigma \delta \left(\frac{x_i}{a_1}\right)^p \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^q \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^s \frac{d\sigma}{D\left(x_1 x_2\right)}\,. \tag{8}$$

Доданки $\iint_\vartheta \delta U^i_{nk}\, d\tau$, $\iint_\vartheta \delta V^i_{nk}\, d\tau$ – суть лінійна комбінація таких величин

$$\sigma'_{pqs} = \frac{1}{M}\iint_\sigma \delta \left(\frac{x_i}{a}\right)^p \left(\frac{x_2}{a}\right)^q \left(\frac{x_3}{a}\right)^s \frac{d\sigma}{D\left(x_1 x_2\right)}\,. \tag{9}$$

$$(p+q+s \leq N-1).$$

Вирази (9) та (8) пов’язані між собою співвідношенням:

$$\sigma_{pqs} = \alpha^p \beta^q \gamma^s \sigma'_{pqs}\,,$$

де $\alpha = \dfrac{a_i}{a_i}$, $\beta = \dfrac{a_2}{a}$, $\gamma = \dfrac{a_3}{a}$.

Для кулі величини σ_{pqs}, σ'_{pqs} тотожні.

Отже, рівності (1) (2) є рівняннями з невідомими σ_{pas}, до яких ще можна долучити тотожності [2].

$$\sigma_{(p+2)qs} + \sigma_{p(q+2)s} + \sigma_{pqs+2} = \sigma_{pqs}$$

$$\left(p,q,s = 0,1,2,\ldots\right) \tag{10}$$

Розпочнемо поетапну реалізацію цієї методики. Для цього запишемо густину так:

$$\delta\left(x_1x_2x_3\right)=\delta_0+a^1_{000}\frac{x_1}{a_1}+a^2_{000}\frac{x_2}{a_2}+a^3_{000}\frac{x_3}{a_3}+$$

$$\frac{1}{2}\left[a^1_{100}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+a^2_{010}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+a^3_{001}\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2\right]+$$

$$\sum_{m+n+k=0}^{\infty}a^1_{mnk}W^1_{mnk}(x_1,x_2,x_3)+\sum_{m+n+k=0}^{\infty}a^2_{mnk}W^2_{mnk}(0,x_2,x_3)$$

$$+\sum_{m+n+k=0}^{\infty}a^3_{mnk}W^3_{mnk}(0,0,x_3)$$

.

Підставимо (11) в стоксову сталу C_{00}.

$$1=C_{00}=\left[\frac{\delta_0}{\delta_c}+\frac{1}{2}\left(\sigma_{200}+\sigma_{020}+\sigma_{002}\right)\right]-\frac{3}{2},$$

звідки

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{\delta_0}{\delta_c}\right)=\frac{\sigma_{000}}{2} \tag{12}$$

До речі, остання рівність визначає верхню межу для значення δ_0 :

$\frac{\delta_0}{\delta_c}=\frac{5}{2}-\frac{\delta_{000}}{2}\le 2.5\quad\left(\sigma_{000}\ge 0\right)$, і оцінку його зміни

$2.5-\frac{3}{2}\frac{\delta_p}{\delta_c}\le\frac{\delta_0}{\delta_c}\le 2.5$.

Приймаючи значення з роботи [5], з (13) одержимо межі для зміни густини, наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Допустимі значення для густини в центрі мас планет

	δ_c	δ_p	$\delta_0^{\min}$	δ_0^{max}
Меркурій	5,44	3,3	8,65	13,6
Венера	5,25	2,8	6,125	13,125
Земля	5,514	2,67	9,78	13,785
Місяць	3,34	3,08	3,73	8,35
Марс	3,94	2,7	5,8	9,85
Юпітер	1,334	0,35	2,8	3,335
Сатурн	0,69	0,36	1,085	1,625
Уран	1,26	0,3	2,7	3,15
Нептун	1,67	0,3	3,725	4,175

За стоксовими сталими до другого порядку включно і динамічним стисненням H обчислимо степеневі моменти I_{pqs} $\left(k+q+s\le 2\right)$ і з їх допомогою визначаємо величини σ_{pas} $\left(k+q+s\le 4\right)$, враховуючи в розкладі (1) тільки один доданок $\left(\delta=const\right)$. Розпишемо цей алгоритм детально, починаючи з коефіцієнтів першого порядку: C_{10},C_{11},S_{11}. У результаті перетворень одержимо:

$$\sigma_{001}=\frac{10}{3}C_{10},\ \sigma_{003}=\frac{4}{3}C_{10},\ \sigma_{021}=\sigma_{201}=C_{10}$$

$$\sigma_{100}=\frac{10}{3}C_{11},\ \sigma_{300}=\frac{4}{3}C_{11},\ \sigma_{120}=\sigma_{102}=C_{11} \tag{13}$$

$$\sigma_{010}=\frac{10}{3}S_{11},\ \sigma_{030}=\frac{4}{3}S_{11},\ \sigma_{210}=\sigma_{120}=S_{11}$$

Враховуючи, що $C_{10}=C_{11}=S_{11}=0$ (початок системи координат у центрі мас), маємо: $\sigma_{001}=\sigma_{100}=\sigma_{001}=0$, а також $\sigma_{pas}=0\ \left(p+q+s=3\right)$.

Перейдемо до визначення величин σ_{pqs} другого і четвертого порядків, послідовно використовуючи стоксові сталі C_{21},S_{21},S_{22}, а саме

$$S_{21}=\frac{-3}{14}\sigma_{101}+\sigma_{103,}C_{21}=\frac{-3}{14}\sigma_{101}+\frac{1}{2}\sigma_{301},C_{21}=\sigma_{121}$$

Після перетворень отримаємо

$$\begin{gathered}\sigma_{101}=35C_{21},\sigma_{103}=17C_{21},\\ \sigma_{310}=17C_{21},\sigma_{121}=C_{21}\end{gathered} \tag{14}$$

Аналогічно, використання S_{21} дає:

$$\begin{gathered}\sigma_{011}=35S_{21},\sigma_{211}=S_{21},\\ \sigma_{031}=17S_{21},\sigma_{013}=17S_{21},\end{gathered} \tag{15}$$

і

$$\sigma_{110}=70S_{22},\sigma_{130}=34S_{22},\sigma_{310}=34S_{22}, \tag{16}$$

Для знаходження степеневих моментів парних степенів σ_{pqs} другого і четвертого порядків беремо стоксові сталі C_{20},C_{22} :

$$C_{20}=\frac{1}{Ma^2}\int_\tau\delta\left(x_3^2-\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)d\tau=\frac{1}{M}\int_\tau\delta U^i_{20}d\tau \tag{17}$$

$$C_{22}=\frac{1}{Ma^2}\int_\tau\delta\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)}{4}d\tau=\frac{1}{Ma^2}\int_\tau\delta U^i_{22}d\tau$$

Розпишемо тотожності (4) для величин (17)

$$C_{20}=-\frac{1}{Ma^2}\int_\tau\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\left(\frac{x_3^3}{3}-\frac{1}{2}x_3\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{Ma^2}\left(\frac{\sigma_{004}}{3}+\frac{1}{2}\left(\sigma_{202}+\sigma_{022}\right)\right)$$

$$C_{20}=-\frac{1}{Ma^2}\int_\tau\frac{\partial\delta}{\partial x_1}\left(x_1x_3^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^3}{3}+x_1x_2^2\right)\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{Ma^2}\left(+\sigma_{2002}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{400}}{3}+\sigma_{220}\right)\right)$$

$$C_{20}=\frac{1}{Ma^2}\int_\tau\frac{\partial\delta}{\partial x_2}\left(x_1x_3^2-\frac{1}{2}\left(x_1^2x_2+\frac{x_2^3}{3}\right)\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{Ma^2}\left(\sigma_{022}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{220}+\frac{\sigma_{040}}{3}\right)\right) \tag{18}$$

$$C_{22}=\frac{1}{Ma^2}\int_\tau\frac{\partial\delta}{\partial x_3}x_3\left(\frac{x_1^2-x_2^2}{4}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{Ma^2}\left(\frac{1}{4}\left(\sigma_{202}-\sigma_{022}\right)\right)$$

$$C_{22} = \frac{1}{Ma^2}\left\{\int_\tau \frac{\partial\delta}{\partial x_4}\frac{1}{4}\left(\frac{x_1^3}{3} - x_2^2 x_1\right)d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{Ma^2}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma_{400}}{3} - \sigma_{220}\right)\right)\right)$$

$$C_{22} = \frac{1}{Ma^2}\int_\tau \frac{\partial\delta}{\partial x_2}\frac{1}{4}\left(x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3}\right)d\tau +$$

$$+ \frac{1}{Ma^2}\left(\frac{1}{4}\left(\sigma_{220} - \frac{\sigma_{040}}{3}\right)\right)$$

Не важко переконатися, що для кулі для парних елементів виконується умова $\int_\tau \frac{\partial\delta}{\partial x_i} u_{nk}^i d\tau = -\int \frac{\partial\delta}{\partial x_i} v_{nk}^i d\tau = 0,$ а тому систему рівнянь (18) після простих спрощень в матричному вигляді можна записати так:

$$Ax = b, \qquad (19)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 6C_{20} \\ 6C_{20} \\ 6C_{20} \\ 4C_{22} \\ 12C_{22} \\ 12C_{22} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \sigma_{004} \\ \sigma_{202} \\ \sigma_{022} \\ \sigma_{400} \\ \sigma_{220} \\ \sigma_{040} \end{pmatrix}$$

Оскільки система (19) має безліч розв'язків (det(A)=0), то приведемо її до вигляду:

$$DY = b_1 C_{20} + b_1 C_{20} + \sigma_{004} b_3, \qquad (20)$$

де

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \sigma_{004} \\ \sigma_{202} \\ \sigma_{022} \\ \sigma_{400} \\ \sigma_{220} \end{pmatrix}$$

Схема (20) має єдиний розв'язок (det(D) $\neq 0$), який виражається через вільну змінну σ_{040}. Для її знаходження використаємо тотожності:

$$\sigma_{400} + \sigma_{040} + \sigma_{004} = \sigma_{200};$$

$$\sigma_{220} + \sigma_{040} + \sigma_{022} = \sigma_{020};$$

$$\sigma_{202} + \sigma_{022} + \sigma_{004} = \sigma_{002},$$

які перетворимо так

$$\sigma_{400} + \sigma_{040} + \sigma_{004} + 2\left(\sigma_{220} + \sigma_{022} + \sigma_{202}\right)$$

$$= \sigma_{200} + \sigma_{020} + \sigma_{002} = \sigma_{000}$$

підставимо в (21) розв'язок системи (20) обчислимо σ_{040}, а далі всі σ_{pqs}.

За формулами (5) знаходимо I_{pqs}^i, а далі і самі коефіцієнти розкладу a_{pqs}^i, і відповідно отримуємо співвідношення для визначення густини та її похідних.

Використовуючи для простоти дані, взяті з роботи [6], а динамічне стиснення з [7], обчислимо для однієї із широт ($\varphi = 60^0$) з кроком по довготі ($\Delta\lambda = 60^0$) вздовж радіуса R($R = 6371 * \rho, 0 \le \rho \le 1, \Delta\rho = 0.1$) значення похідних і результати подамо табл. 2.

Таблиця 2

Значення часткових похідних функції розподілу мас

Похід на	Радіус	Широта					
		0	60	120	180	240	300
$\frac{\partial\delta}{\partial x_1}$	0	0	0	0	0	0	0
	637,1	-2,95	-2,22	0,74	2,95	2,22	-0,74
	1274,2	-5,66	-4,29	1,45	5,66	4,29	-1,45
	1911,3	-7,9	-6,06	2,11	7,9	6,06	-2,11
	2548,4	-9,44	-7,38	2,69	9,44	7,38	-2,69
	3185,5	-10,05	-8,1	3,17	10,05	8,1	-3,17
	3822,6	-9,49	-8,07	3,52	9,49	8,07	-3,52
	4459,7	-7,52	-7,15	3,72	7,52	7,15	-3,72
	5096,8	-3,91	-5,17	3,73	3,91	5,17	-3,73
	5733,9	1,56	-2	3,54	-1,56	2	-3,54
	6371	9,15	2,51	3,11	-9,15	-2,51	-3,11
$\frac{\partial\delta}{\partial x_2}$	0	0	0	0	0	0	0
	637,1	-0,77	-1,08	-0,31	0,77	1,08	0,31
	1274,2	-1,46	-2,1	-0,63	1,46	2,1	0,63
	1911,3	-2	-2,99	-0,95	2	2,99	0,95
	2548,4	-2,32	-3,7	-1,29	2,32	3,7	1,29
	3185,5	-2,35	-4,16	-1,64	2,35	4,16	1,64
	3822,6	-2,01	-4,31	-2	2,01	4,31	2
	4459,7	-1,23	-4,09	-2,38	1,23	4,09	2,38
	5096,8	0,06	-3,43	-2,79	-0,06	3,43	2,79
	5733,9	1,95	-2,28	-3,23	-1,95	2,28	3,23
	6371	4,5	-0,57	-3,69	-4,5	0,57	3,69
$\frac{\partial\delta}{\partial x_3}$	0	0	0	0	0	0	0
	637,1	1,03	0,49	-0,58	-1,12	-0,58	0,49
	1274,2	1,95	0,92	-1,13	-2,15	-1,13	0,92
	1911,3	2,65	1,23	-1,6	-3,02	-1,6	1,23
	2548,4	3,01	1,35	-1,97	-3,62	-1,97	1,35
	3185,5	2,94	1,23	-2,18	-3,89	-2,18	1,23
	3822,6	2,3	0,8	-2,22	-3,72	-2,22	0,8
	4459,7	1	-0,01	-2,03	-3,05	-2,03	-0,01
	5096,8	-1,07	-1,24	-1,59	-1,77	-1,59	-1,24
	5733,9	-4,03	-2,97	-0,86	0,2	-0,86	-2,97
	6371	-7,99	-5,26	0,2	2,93	0,2	-5,26

Не роблячи ніяких геофізичних прогнозів з результатів обчислень, відзначимо, що, без сумніву, дослідження таким способом мають зміст. Адже значення похідних змінюються в широкому діапазоні, і хоча переважно є від'ємними, проте можуть бути різних знаків. Причина цього різна, і полягає, по-перше, у недостатньому врахуванні членів у розкладі (1), по-друге, способом такої побудови.

Література

1. Буллен К.Е. Плотность Земли / К.Е. Буллен. – М.: Мир, 1978. – 437 с.
2. Фис М.М. Побудова точних моделей мас планет з урахуванням стоксових постійних вищих порядків / М.М. Фис, Р.С. Фоца, А.Р. Согор // Збірник наукових праць "Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування". – Європейський досвід. – Чернігів, 2007.
3. Метод знаходження густини розподілу мас планети з урахуванням стоксових сталих до четвертого степеня / М.М. Фис, Р.С. Фоца, А.Р. Согор, В.О. Волос // Геодинаміка, 1(8). – Львів, 2008. – С. 25–34.
4. Мещеряков Г.А. Определение плотности земных недр по биоортогональным системам многочленов / Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс // В кн.: Теория и методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – 1981. – С. 329–334.
5. Яцкив Я.С. Нутация в системе астрономических постоянных / Я.С. Яцкив. – К., 1980, (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-80-95Р).
6. Lerch F. Coddard earth models for oceanographic applications (GEM-10B and 10C) / F. Lerch, B. Putney // Mar. Geodes. – 1981. – 5, № 2. – P. 145–185.
7. Marchenko A. N. On the representation of planet' s gravitation and magnetic fields. Planet' s radial density profiles // Astronomical Report' s, Uman, 2000, 24 p.

Новий підхід до використання стоксових сталих для побудови функцій та їх похідних розподілів мас планет

П. Черняга, М. Фис

На відміну від традиційного, запропонований інший підхід до використання стоксових сталих другого порядку, в якому функція розподілу мас та її похідні визначаються одночасно багаточленами відповідно четвертого та третього степенів.

Новый подход к использованию стоксовых постоянных для построения функций и их производных распределений масс планет

П. Черняга, М. Фис

В отличие от традиционного, предложен другой подход к использованию стоксовых постоянных второго порядка, в котором функция распределения масс и ее производные определяются одновременно многочленами соответственно четвертой и третьей степени.

The new approach of Stokes constants for the construction of functions and its derivatives in the mass distribution of planets

P. Chernyaha, M. Fis

Proposed a different approach to the use of Stokes constants of second order in which the mass distribution function and its derivatives are determined simultaneously polynomials respectively the fourth and third degree.