УДК 534.111

О.І. Хитряк[1], М.Б. Сокіл[2], А.А. Андрухів[2]
[1]Академія Сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного,
[2]Національний університет “Львівська політехніка”

ЗАСТОСУВАННЯ ХВИЛЬОВОЇ ТЕОРІЇ РУХУ ТА АСИМПТОТИЧНОГО МЕТОДУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ПОЗДОВЖНЬО-РУХОМИХ СИСТЕМ

Запропоновано методику дослідження динамічних процесів у двовимірних гнучких елементах. В її основу покладено: а) принцип одночастотності коливань у нелінійних системах; б) хвильову теорію руху; в) поширення асимптотичного методу Крилова–Боголюбова–Митропольського на нові класи динамічних систем. У сукупності наведене дає змогу отримати залежності, що описують закони зміни у часі основних параметрів коливань.

It is offered the method of investigation of dynamic processes in two-dimensional flexible elements. It is based on: a) the principle of single frequency oscillations in nonlinear systems, b) the wave theory of motion, c) distribution of asymptotic method of Krylov-Bogoliubov-Mitropol'skii new class of dynamical systems. Together lets you complete the dependences describing the laws change over time of key parameters fluctuations.

Актуальність і огляд основних результатів. В останні десятиліття хвильова теорія руху [1, 2] набула нового розвитку, насамперед для дослідження процесів у довговимірних середовищах [3–6], тобто середовищах, основні характеристики хвиль яких змінюються як вздож середовища, так і в часі. Її узагальнення дає змогу також вивчати процеси у середовищах, які для свого аналітичного дослідження не допускають застосування класичного методу відокремлення змінних. Йдеться, зокрема, про однорідні динамічні системи, які характеризуються поздовжньою швидкістю руху. Набагато складнішими і одночасно найважливішими є задачі для середовищ обмеженої довжини. Під час описання динамічного процесу у них слід враховувати крайові умови. Перші спроби щодо перенесення хвильової теорії руху на випадок одновимірних обмеженої довжини систем зроблено у [7, 8], де встановлено низку особливостей у них. Зокрема показано, що процес у них можна трактувати як накладання прямої і відбитої хвиль, довжини яких є різними, а частота процесу залежить від поздовжньої складової швидкості руху. Поєднання ж хвильової теорії із асимптотичними методами нелінійної механіки [9, 10] дало змогу в [11, 12] для слабонелінійних одновимірних моделей руху систем (квазілінійних) дослідити вплив різної природи обмежених за величиною силових чинників. У цій роботі робиться спроба розширити базові положення хвильової теорії руху, які викладені у [7, 8], на складніший випадок, а саме: двовимірні системи, що характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху.

Постановка задачі. Математичною моделлю коливань поздовжньо-рухомих двовимірних тіл малої згинної жорсткості є диференціальне рівняння

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - \left(\alpha^2 - V^2\right)u_{xx} - \gamma^2 u_{yy} = \varepsilon f\left(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}\right), \qquad (1)$$

де α, γ – деякі сталі; $u(x, y, t)$ – функція, яка описує форму динамічного процесу; t – час; x, y – Ейлерові координати рухомого об’єкта; V – його швидкість поздовжнього руху;

$\varepsilon f\left(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}\right)$ – відома аналітична функція, яка описує нелінійні сили системи, а малий параметр ε вказує на малу величину останніх порівняно із лінійною складовою відновлювальної сили. Для рівняння (1) розглядатимемо крайові умови вигляду

$$u(x, y, t)_{|x=0} = u(x, y, t)_{|x=l} = 0\,, \tag{2}$$

які узгоджуються із умовами безвідривності стрічки від привідного і веденого барабанів на лініях контакту з останніми.

Легко переконатись, що навіть спрощена лінійна математична модель динамічного процесу досліджуваного об'єкта (за $\varepsilon = 0$), тобто

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - \left(\alpha^2 - V^2\right)u_{xx} - \gamma^2 u_{yy} = 0\,, \tag{3}$$

для свого вивчення не дає змоги застосувати такі класичні методи побудови розв'язків рівнянь з частинними похідними, як Фур'є і Д'Аламбера [13]. Тому метою цієї роботи є поширення на вказані системи асимптотичних методів КБМ.

Методика розв'язування. ***Незбурена задача***. Розвиваючи основну ідею концепції хвильового руху для динамічних систем, які характеризуються сталою складовою швидкості поздовжнього руху, в [14] показано, що розв'язок рівняння (3) за крайових умов (2) можна трактувати як накладання двох хвиль:

$$u(t, x, y) = a\cos(\kappa x + \delta y + \omega t + \varphi) + b\cos(\chi x - \delta y - \omega t + \psi)\,, \tag{4}$$

де ω – частота; a, b – амплітуди прямої і відбитої хвиль; κ, χ – їхні хвильові числа, а δ – хвильове число поперечної складової хвилі; φ, ψ – початкові фази хвиль:

$$\kappa_k = \frac{\pi k}{l} + \frac{V\sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + \pi^2 k^2(\alpha^2 - V^2)}}{\alpha l\sqrt{\alpha^2 - V^2}}, \quad \chi_k = \frac{\pi k}{l} - \frac{V\sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + \pi^2 k^2(\alpha^2 - V^2)}}{\alpha l\sqrt{\alpha^2 - V^2}}\,,$$

$$\omega_k = \frac{1}{\alpha l}\sqrt{\alpha^2 - V^2}\cdot\sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + \pi^2 k^2(\alpha^2 - V^2)}, \quad k = 1,2... \tag{5}$$

Обґрунтувати це подання можна хоча б такими факторами: а) за $\gamma = 0$ із (4) утворюються відомі результати, які стосуються коливальних процесів у одновимірних тілах; б) у граничному випадку за $V = 0$ із (4) маємо результати, що узгоджуються із класичними. В отриманих залежностях залишився невизначеним параметр δ – хвильове число поперечної хвилі. Його можна знайти із додаткових умов. Зокрема, якщо припустити, що впоперек стрічки поміщається ціле число півхвиль, то параметр δ приймає значення $\delta = \frac{m\pi}{b}$ (b – ширина стрічки, $m = 1,2,..$).

Збурене рівняння. Відповідно до загальних принципів побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь із малим параметром у правій частині розв'язок збуреного рівняння (1) за однорідних крайових умов (2) шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду:

$$u(x, y, t) = a(\cos(\kappa x + \delta y + \theta) - \cos(\chi x - \delta y - \theta)) + \varepsilon u_1(a, x, y, \theta) + \varepsilon^2 u_2(a, x, y, \theta) + \ldots, \tag{6}$$

в якому $\theta = \omega t + \varphi$, а невідомі функції $u_1(a, x, y, \theta), u_2(a, x, y, \theta),\ldots$ повинні визначатися так, щоб: а) асимптотичне подання розв'язку (6) задовольняло з необхідним степенем точності вихідне рівняння (1); б) вони були періодичними стосовно x, y, θ; в) задовольняли крайові умови, які випливають із (2); г) не містили у своїх представленнях доданків, пропорційних до $\sin\theta, \cos\theta$.

Крім того, нелінійні сили є причиною того, що параметри a і φ для збуреного випадку є змінними величинами. Нижче розглядатимемо випадок, коли ці параметри не змінюють своєї величини вздовж стрічки, а залежать тільки від часу. Закони їх зміни шукатимемо у вигляді диференціальних співвідношень:

$$a_t = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots,$$

$$\varphi_t = \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots. \tag{7}$$

Отже, задача полягає у визначенні таких невідомих функцій $A_1(a), A_2(a), \ldots,\ B_1(a), B_2(a), \ldots$ та $u_1(a, x, y, \theta), u_2(a, x, y, \theta), \ldots$, за яких асимптотичне подання розв'язку (6) із необхідним степенем точності задовольняє вихідне рівняння (1). Для цього диференціюванням (6) по незалежних змінних із (1) матимемо:

$$L[u_1] = \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + 2V\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial x} - (\alpha^2 - V^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = F_1(a, x, y, \theta) +$$

$$+ 2\{A_1(a)(\omega + \kappa V)(\sin(\kappa x + \delta y + \theta) + (\omega - \chi V)\sin(\chi x - \delta y - \theta)) +$$

$$+ aB_1(a)((\omega + \kappa V)\cos(\kappa x + \delta y + \theta) - (\omega - \chi V)\cos(\chi x - \delta y - \theta))\}, \tag{8}$$

де $F_1(a, x, \theta) = f(u, u_x u_t)\Big|_{\substack{u = a(\cos(\kappa x + \delta y + \theta) - \cos(\chi x - \delta y - \theta)),\\ u_x = -a(\kappa \sin(\kappa x + \delta y + \theta) - \chi \sin(\chi x - \delta y - \theta)),\\ u_y = -a\delta(\sin(\kappa x + \delta y + \theta) + \sin(\chi x - \delta y - \theta)),\\ u_t = -\alpha\omega(\sin(\kappa x + \delta y + \theta) + \sin(\chi x - \delta y - \theta))}}$.

Після нескладних тригонометричних перетворень коефіцієнти за $A_1(a)$ і $B_1(a)$ у правій частині співвідношення (8) подамо у вигляді

$$[(\omega + \kappa V)\sin(\kappa x + \delta y + \theta) + (\omega - \chi V)\sin(\chi x - \delta y - \theta)]A_1(a) +$$

$$+ a[(\omega + \kappa V)\cos(\kappa x + \delta y + \theta) - (\omega - \chi V)\cos(\chi x - \delta y - \theta)]B_1(a) =$$

$$= [(\omega + \kappa V)\sin(\kappa x + \delta y) + (\omega - \chi V)\sin(\chi x - \delta y)](A_1(a)\cos\theta - aB_1 \sin\theta) +$$

$$+ [(\omega + \kappa V)\cos(\kappa x + \delta y) - (\omega - \chi V)\cos(\chi x - \delta y)](A_1(a)\sin\theta + aB_1\cos\theta). \tag{9}$$

Для однозначного визначення із диференціального рівняння (8) невідомих функцій $A_1(a)$ і $B_1(a)$ накладемо $U_1(a, x, y, \theta)$ додаткові умови, а саме: вона не повинна містити у розкладі доданків, пропорційних до $\sin\theta$ і $\cos\theta$. Із 2π періодичності по θ вказаної функції випливає, що такі самі властивості мають і її частинні похідні по θ, x і y. Це дає змогу отримати із (9) систему алгебраїчних рівнянь, яка пов'язує шукані функції $A_1(a)$ і $B_1(a)$ у вигляді

$$[(\omega + \kappa V)\sin(\kappa x + \delta y) + (\omega - \chi V)\sin(\chi x - \delta y)]A_1(a) +$$

$$+ a[(\omega + \kappa V)\cos(\kappa x + \delta y) - (\omega - \chi V)\cos(\chi x - \delta y)]B_1(a) = \frac{-\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(a, x, y, \theta)\cos d\theta,$$

$$[(\omega + \kappa V)\cos(\kappa x + \delta y) - (\omega - \chi V)\cos(\chi x - \delta y)]\ A_1(a) -$$

$$- a[(\omega + \kappa V)\sin(\kappa x + \delta y) + (\omega - \chi V)\sin(\chi x - \delta y)]B_1(a) = \frac{-\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(a, x, y, \theta)\sin\theta d\theta. \tag{10}$$

Шляхом усереднення [15] правих і лівих частин (10) по лінійних змінних x, y знаходимо

$$A_1(a)=\frac{\varepsilon}{2\pi bl\left[(\omega+\kappa V)^2+(\omega-\chi V)^2\right]}\int_0^l\int_0^b\int_0^{2\pi} f_1(a,x,y,\theta)\times$$

$$\times\{[(\omega+\kappa V)\sin(\kappa x+\delta y)+(\omega-\chi V)\sin(\chi x-\delta y)]\cos\theta+[(\omega+\kappa V)\cos(\kappa x+\delta y)-(\omega-\chi V)\cos(\chi x-\delta y)]\sin\theta\}d\theta dydx;$$

$$B_1(a)=\frac{\varepsilon}{a2b\pi l\left[(\omega+\kappa V)^2+(\omega-\chi V)^2\right]}\int_0^l\int_0^b\int_0^{2\pi} f_1(a,x,\theta)\times \tag{11}$$

$$\{[(\omega+\kappa V)\sin(\kappa x+\delta y)+(\omega-\chi V)\sin(\chi x-\delta y)]\sin\theta-[(\omega+\kappa V)\cos(\kappa x+\delta y)-(\omega-\chi V)\cos(\chi x-\delta y)]\cos\theta\}d\theta dydx.$$

Знайшовши функції, які визначають для першого наближення основні характеристики хвиль, тобто функції $A_1(a)$ і $B_1(a)$, перейдемо до знаходження функції $U_1(a,x,y,\theta)$.

Для цього подамо її у вигляді

$$u_1(a,x,y,\theta)=r_1(a,x,y,\theta)+w_1(a,x,y,\theta). \tag{12}$$

Нехай функція $w_1(a,x,y,\theta)$ є розв'язком неоднорідного рівняння

$$L[w_1]=\tilde{F}_1(a,x,y\theta), \tag{13}$$

де $\tilde{F}_1(a,x,y\theta)$ – права частина рівняння (8), з цією лише різницею, що вона не містить доданків, пропорційних до $\cos\theta$ та $\sin\theta$. Функція ж $r_1(a,x,y,\theta)$ є загальним розв'язком однорідного рівняння:

$$L[r_1]=0. \tag{14}$$

Що стосується крайових умов для функції $r_1(a,x,y,\theta)$, то вони повинні узгоджуватись із (2) та (12), тобто

$$r_1(a,x,y,\theta)\big|_{x=0}=-w_1(a,x,y,\theta)\big|_{x=0};$$

$$r_1(a,x,y,\theta)\big|_{x=l}=-w_1(a,x,y,\theta)\big|_{x=l}. \tag{15}$$

Частинний розв'язок рівняння (13) знаходимо методом невизначених коефіцієнтів. Для цього невідому і відому функції подамо у такому вигляді:

$$w_1(a,x,y,\theta)=\sum_{k\neq1}\sum_m\sum_s U_{1ksm}(a)\left(A_{sm}\sin\frac{s\pi}{l}x+B_{sm}\cos\frac{s\pi}{l}x\right)Y_m\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\exp i(k\theta); \tag{16}$$

$$\tilde{F}(a,x,y,\theta)=\sum_{k\neq1}\sum_m\sum_s f_{ksm}(a)\left(C_{sm}\sin\frac{s\pi}{l}x+D_{sm}\cos\frac{s\pi}{l}x\right)Y_m\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\exp i(k\theta), \tag{17}$$

де $\left\{Y_m\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\right\}$ – повні ортогональні системи функцій вигляду $\left\{Y_m\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\right\}=\left\{\sin\frac{m\pi}{b}y\right\}$.

Для знаходження функції $r_1(a,x,y,\theta)$ маємо рівняння, подібне до (3), тому його розв'язок шукаємо у вигляді

$$r_1(a,x,y,\theta)=\sum_{k\neq1}\sum_m\bar{\Delta}_{km}\cos\left(\mathrm{X}_{km}x+\Omega_{km}\psi+\frac{m\pi}{b}y+\bar{\Psi}_{km}\right)+\tilde{\Delta}_{km}\cos\left(H_{km}x-\Omega_{km}\psi-\frac{m\pi}{b}y+\tilde{\Psi}_{km}\right), \tag{18}$$

де невідомі сталі $\Omega_{km},\mathrm{X}_{km},H_{km}$ пов'язані дисперсійними співвідношеннями, схожими, як і в [14], а $\bar{\Delta}_{km},\bar{\Psi}_{km},\tilde{\Delta}_{km},\tilde{\Psi}_{km}$ – повинні забезпечувати виконання крайових умов. Враховуючи наведене, а також (15), із (13) шляхом прирівнювання коефіцієнтів за однакових гармонік правої та лівої частин залежності (13) отримаємо невідомі коефіцієнти.

Подібного вигляду отримують диференціальні рівняння для другого наближення, лише вираз для функції $\widetilde{F}_2(a, x, y\theta)$ має громіздкіший вигляд.

Висновок. Запропонована у роботі методика дає можливість визначити вплив на динамічні процеси двовимірних гнучких елементів швидкості поздовжнього руху, нелінійних сил. Вона після деяких узагальнень може бути поширена і на неавтономні системи.

1. Додд Р., Ейблек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с. 2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с. 3. Митропольский Ю. А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна – Гордона // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 9. – С. 1209–1216. 4. Митропольский Ю.А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Брезертона // Укр. мат. журн. – 1998. – 59, № 1. – С. 58–71. 5. Митропольский Ю.А., Лимарченко О.С. К вопросу об асимптотических приближениях для медленных волновых процессов в нелинейных диспергирующих средах // Укр. мат. журн. – 1998. – 59, № 3. – С. 357–371. 6. Митропольський Ю.О., Сокіл Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови асимптотичного розв'язку збуреного нелінійного рівняння Клейна–Гордона // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 5. – С. 665–670. 7. Мартинців М.П., Сокіл М.Б. Одне узагальнення методу Д'Аламбера для систем, які характеризуються поздовжнім рухом // зб. наук.-техн; пр. УДЛТУ. – Львів. – 2003. – Вип. 13.4. – С. 64–67. 8. Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних системах і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів: УДЛТУ. – 2003. – Вип. 28. – С.81–89. 9. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк. – 1976. – 592 с. 10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с. 11. Харченко Є.В., Сокіл М.Б. Вплив періодичного збурення на багаточастотні коливання одновимірних нелінійно пружних середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом // Динаміка, міцність та проектування машин і приладів // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – 2007. – № 588. – С.81–89. 12. Харченко Є.В., Сокіл М.Б. Нелінійні процеси у середовищах, які характеризуються поздовжнім рухом і вплив способу закріплення на їх коливання // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні і приладобудуванні. – Львів, 2007. – № 41. – С.156–159. 13. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. Шк., 1970. – 710 с. 14. Сокіл Б.І. Хвильова теорія руху у дослідженні нелінійних коливань двовимірних об'єктів, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху / Б.І. Сокіл, О.І. Хитряк, М.Б. Сокіл // зб. наук. пр. "Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності". – Львів, 2010. – № 4. – С. 55–60. 15. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1972. – 440 с.