УДК 533.6.01

В.С. Ловейкін[1], Ю.В. Човнюк[1], К.І. Почка[2]
[1] Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ),
[2] Київський національний університет будівництва і архітектури

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ В АНАЛІЗІ ВІБРАЦІЙНО-ХВИЛЬОВИХ ПОЛІВ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ СИСТЕМ З РУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ

Проведено всебічний динамічний аналіз вібраційно-хвильових полів, що виникають у дискретно-континуальних системах з рухомими границями, за допомогою узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень.

Comprehensive dynamic analysis of oscillating-wave fields arising in the discrete-wave systems with moving boundaries with application of the generalized approach of final integral transformations has been performed.

Постановка проблеми. Уже більше двох століть перед математиками стоять проблеми розв'язання нелінійних задач, які описуються рівняннями у частинних похідних, найскладнішою з яких є визначення рухомих границь. Навіть якщо основне рівняння, що описує досліджуваний процес, лінійне, наявність рухомих границь перетворює задачу в суттєво нелінійну: сума двох розв'язків не є розв'язком. Це стало причиною того, що до цього часу не має методів точного аналітичного розв'язку таких задач.

Дослідникам було необхідно приймати різні припущення [1–4], що призводило до обмеженості розв'язків, а у деяких випадках і до неприйнятних результатів. У розв'язках, отриманих Даламбером для хвильового рівняння, вид досліджуваних функцій, які залежать від граничних умов, залишається невідомим [8].

У [4] зроблено спробу розробити загальний метод точного аналітичного розв'язку задач з рухомими границями, який використовує загальний для усіх подібних задач факт розповсюдження збурень у суцільних середовищах зі скінченною швидкістю. Задачі з рухомими границями виникають у багатьох областях теоретичного й прикладного природознавства: гідро-механіці, теплофізиці, теорії фільтрації і руху в'язкопластичних середовищ тощо.

У цій роботі показано у багатьох існуючих методах (методи характеристик, теорії розмірностей, малого параметра, наближений метод Кірквуда–Бете [4], введення реальних величин запізнень та інші прийоми, що ґрунтуються на тих чи інших припущеннях) працездатність і перспективність запропонованого методу (узагальнений метод інтегральних перетворень) розв'язку проблеми рухомих границь рівнянь математичної фізики, його дієвість. Основну увагу приділено динамічному аналізу та дослідженню вібраційно-хвильових полів дискретно-континуальних систем з рухомими границями.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень був запропонований М.С. Кошляковим [1], його теорія розроблена Грінбергом Г.А. [2], Якнайповніший перелік робіт щодо застосування методу до задач, які описані рівняннями параболічного типу, наведений у [3], а до задач, що зводяться до рівнянь гіперболічного типу, – у [4–7]. Зазвичай шукані розв'язки задач з рухомими границями знаходять у формі розкладу за власними функціями відповідної задачі з нерухомими границями, які збігаються у кожний момент з положенням істинних рухомих границь. Отримана при цьому нескінченна система сукупних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку може бути розв’язана на ПЕОМ. Отже, розв’язок нелінійної задачі знаходять як комбінацію елементів розв’язків лінійних задач. Зрозуміло, що це призводить до певної похибки, виявити яку можливо лише порівнянням отриманих результатів з точним розв’язком.

Слід зазначити, що більшість із вищезгаданих методів застосовувати для розв’язання задач з двома рухомими границями, фактично неможливо. Хоча метод характеристик й узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень придатні для розв’язку й такого типу задач, вони реалізуються на ПЕОМ, що не завжди буває зручним.

Мета роботи полягає у встановленні основних параметрів (характеристик) вібраційно-хвильових полів та закономірностей їх просторово-часової еволюції у дискретно-континуальних системах з рухомими границями за допомогою узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень, розвиненого в [1–7].

Виклад основного матеріалу дослідження. Переважно для визначення динамічних параметрів вібромашин (для ущільнення різноманітних сумішей, наприклад, будівельних, бетонних, зернових, рослинно-насіннєвих, різноманітних напівфабрикатів, відходів сільськогосподарського виробництва, конгломератів переробки, сипких матеріалів тощо) використовують моделі систем із зосередженими параметрами, у яких маса, пружність і опір враховуються роздільно. Такі моделі цілком виправдані під час вивчення руху вібромашин, оскільки їх робочий орган є твердим тілом. Усі точки робочого органа переміщаються у фазі з однаковою амплітудою коливань. Тому поточне значення переміщення робочих органів вібромашин залежить від однієї змінної – часу t, а їх рух описується звичайними диференціальними рівняннями. Однак у рух приведений не тільки робочий орган вібромашин, але й сама суміш (того чи іншого фізичного походження), яка під дією вібрації може, наприклад, істотно ущільнюватись (всередині такої суміші відбуваються істотні структурні зрушення під впливом вібраційно-хвильових полів зовнішнього походження, які, своєю чергою, призводять до виникнення нових формоутворень у суміші, а остання набуває квазікристалічної структури, стає просторово впорядкованою). Отже, динамічні параметри вібромашин повинні бути визначені з урахуванням суміші (її властивостей та особливостей). Завдання полягає у тому, щоб віднайти закономірності руху робочого органа, який взаємодіє з сумішшю, оскільки у кінцевому рахунку фактичні параметри визначають ефективність процесу ущільнення (суміші). Численні досліди, проведені на віброمайданчиках, а також за допомогою поверхневої та глибинної вібромашин (для ущільнення бетонних сумішей [9]) показали, що суміш справляє істотний вплив не тільки на величину, але й на характер зміни амплітуди переміщення робочого органа. Результати цих дослідів дали змогу зробити такі висновки. По-перше, суміш справляє істотний вплив на характер зміни й величину амплітуди переміщення робочого органа вібромашин. По-друге, спроба врахувати цей вплив простим складанням коливних мас вібромашини й середовища призводить за певних значень висот стовпа суміші до значних помилок під час проведення інженерних розрахунків подібних дискретно-континуальних систем. Отже, існуючі залежності для визначення динамічних параметрів вібромашин є непридатними в умовах взаємодії їх робочих органів з сумішшю. Щоб внести відповідні корективи у ці залежності, необхідно встановити математичну модель суміші й визначити її характеристики.

Будь-яка суміш, згідно з численними дослідженнями, може бути подана як система з розподіленими параметрами. Це означає, що її інерційні, пружні та дисипативні властивості розподілені по усьому об’єму суміші, а не зосереджені у вигляді маси, пружини й демпфера, як це прийнято під час моделювання вібромашин. Кожний елементарний прошарок суміші може бути умовно замінений мініатюрною масою (рис. 1), яка пов’язана з іншою такою самою масою, пружиною й демпфером, тобто кожний прошарок являє собою систему з одним ступенем вільності руху [9]. У результаті таких представлень й міркувань можна прийти до системи з нескінченною кількістю ступенів вільності руху, тобто до системи з розподіленими параметрами. Процес руху цієї моделі є таким. Робочий орган вібромашини є джерелом енергії для суміші. Прошарок контактної зони, який бере участь у коливаннях, передає енергію наступним прошаркам. Коливання передаються почерговим стискуванням й розтягом прошарків. При цьому процес залучення прошарків у коливання відбуватиметься не миттєво, а з запізненням стосовно попередніх внаслідок їх інертності. Поступово прошарки, обмежені контурами середовища, яке ущільнюється, почнуть коливатись. Тобто у розглядуваній суміші виникають вібраційно-хвильові рухи. Швидкість розповсюдження останніх у суміші визначається фізико-механічними параметрами останньої (у цій роботі позначається a, *м/с*). Рух системи, який залежить від просторової (x) та часової (t) координат, описується хвильовими рівняннями у частинних похідних.

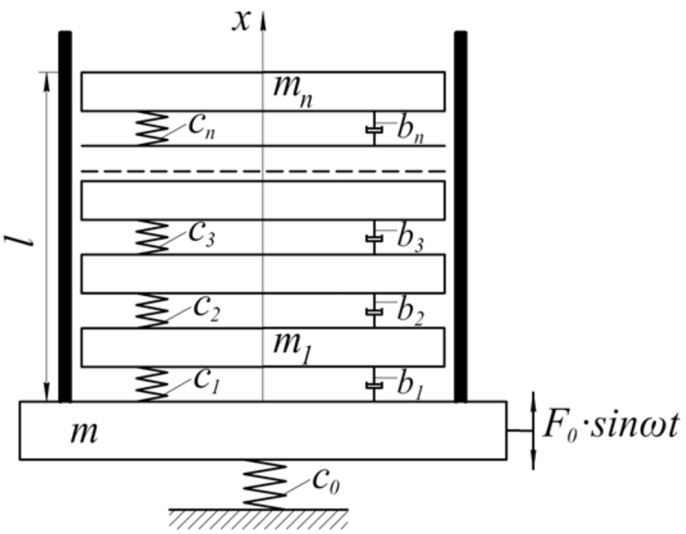

Рис. 1. Модель вібруючої суміші (за даними [9]*):*
c_0 *– коефіцієнт жорсткості пружини вібромашини;* c_i, b_i, m_i *– жорсткість, коефіцієнт в'язкого опору, маса i-го прошарку суміші;* m *– маса піддона;* F_0 *– амплітуда;* ω *– кругова частота коливань зовнішньої вимушеної сили;* $h \equiv l$ *– висота суміші у формі*

Такі рівняння ґрунтуються на розгляді руху елементарного прошарку суміші із врахуванням діючих на нього сил й виникаючих при цьому деформацій. При цьому приймаються такі припущення. Вважають, що сили, що діють на елементарні прошарки, не викликають їх руйнування. Деформації прошарків доволі малі, а їх залежність від напружень лінійна й підпорядковується закону Гука. Сума сил, прикладених до прошарку з боку сусідніх прошарків під час їх коливання, дорівнює масі прошарку, помноженій на його прискорення, що відповідає другому закону Ньютона [9].

За таких припущень хвильове рівняння може бути записане так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

де $u = u(x,t)$ являє собою переміщення поточного прошарку суміші під час коливань. Це переміщення залежить від місцеположення прошарку (координати x) та від часу збурення t (рис. 1);

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ – прискорення прошарку, що розглядається: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$, де $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ – деформація прошарку. Швидкість хвилеутворень у суміші залежить від пружних та інерційних властивостей суміші, які враховуються модулем пружності E та щільністю ρ суміші:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{2}$$

Якщо врахувати процеси розсіювання/дисипації енергії у суміші у процесах генерації всередині неї різноманітних хвилеутворень, тоді модуль пружності набуває комплексного вигляду:

$$\tilde{E} = E^* = E \cdot (1 + i \cdot \gamma); \qquad i^2 = -1, \tag{3}$$

а співвідношення між напруженням σ та деформацією ε прошарку (закон Гука) приймає комплексну форму:

$$\sigma = -E \cdot \varepsilon \cdot (1 + i \cdot \gamma) = -E \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4}$$

У (4) напруження σ складається з компонент: пружної ($-E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$) й дисипативної ($-E \cdot \gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$). Параметр γ характеризує розсіювання енергії (т. з. коефіцієнт втрат). Він дорівнює відношенню енергії ΔW, що поглинається елементарним об'ємом суміші за період коливань (T), до потенціальної енергії пружної деформації W цього об'єму: $\gamma = \frac{\Delta W}{2\pi \cdot W}$ [9].

Згідно з методом Даламбера, загальний розв'язок рівняння (1) записується такою комплексною хвильовою функцією:

$$u(x,t) = u_0 \cdot \exp[i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)], \tag{5}$$

де u_0 – амплітуда переміщення прошарку суміші, що знаходиться у зоні контакту з робочим органом, який генерує вібраційні поля й вібраційно-хвильові збурення в оброблюваній суміші; k – хвильовий вектор. (Зрозуміло, що істинне значення $u(x,t)$ при цьому є $\mathrm{Re}\{u_0 \cdot \exp[i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)]\}$).

Якщо врахувати залежності (3) та (4), тоді з рівняння (1) легко отримати дисперсійне співвідношення (залежність $\omega(k)$):

$$\frac{\omega^2 \cdot (1 - i \cdot \gamma)}{a^2 \cdot (1 + \gamma^2)} = k^2 = (k' + i \cdot k'')^2, \tag{6}$$

де $k' = \mathrm{Re}\, k$, $k'' = \mathrm{Im}\, k$. Розв'язавши стосовно k' та k'' систему рівнянь:

$$\begin{cases} (k')^2 - (k'')^2 = \dfrac{\omega^2}{a^2 \cdot (1 + \gamma^2)}; \\ 2 \cdot k' \cdot k'' = -\dfrac{\omega^2 \cdot \gamma}{a^2 \cdot (1 + \gamma^2)}, \end{cases} \tag{7}$$

можна встановити значення компонент хвильового вектора k:

$$k' = \frac{\omega}{a} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^2 + 1} + 1}{2 \cdot (\gamma^2 + 1)}}; \qquad k'' = -\frac{\omega}{a} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^2 + 1} - 1}{2 \cdot (\gamma^2 + 1)}}. \tag{8}$$

Співвідношення (8) встановлюють фізичний зміст k' та k'', а саме: 1) k' – характеризує істинне значення хвильового вектора, який визначає миттєву фазу вібраційно-хвильового збудження на відстані x від джерела збудження ($\sim e^{-i \cdot (k' \cdot x)}$). Крім того, за допомогою k' можна встановити довжину хвилі, яка розповсюджується у суміші:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'}; \tag{9}$$

2) k'' – визначає коефіцієнт затухання за амплітудою вібраційно-хвильового утворення всередині суміші ($\sim e^{-i \cdot (i \cdot k'' \cdot x)} = e^{k'' \cdot x}$) і відстань, на якій це хвилеутворення затухає (за амплітудою) у:

а) e-разів – $$L_e = \frac{1}{k''};\tag{10}$$

б) 10 разів (на порядок) – $$L_{10} = \frac{\ln 10}{k''}.\tag{11}$$

Аналітичний розв'язок (1) можна отримати за допомогою методу М.С. Кошлякова – Г.А. Грінберга за таких граничних умов (рис. 1):

$$u(x,t)\big|_{x=0} = A\cdot\sin\omega\cdot t;\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=h\equiv l} = 0.\tag{12}$$

Вказаний розв'язок має такий вигляд:

$$u(x,t) = A\cdot\left\{\cos\left(\frac{\omega\cdot x}{a}\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{\omega\cdot l}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega\cdot x}{a}\right)\right\}\cdot\sin\omega\cdot t +$$

$$+\frac{2\cdot A\cdot\omega\cdot a}{l}\cdot\sum_{\tilde{k}=1}^{\infty}\left\{\frac{\left[(-1)^{\tilde{k}-1} - 1 + (-1)^{\tilde{k}}\cdot\cos\left(\frac{\omega\cdot l}{a}\right)\right]}{\omega^2 - \left(\frac{\tilde{k}\cdot\pi\cdot a}{l}\right)^2}\right\}\cdot\sin\left(\frac{\tilde{k}\cdot\pi\cdot a\cdot t}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{\tilde{k}\cdot\pi\cdot x}{l}\right).\tag{13}$$

У (12) та (13) A – амплітуда коливань прошарку суміші у контактній зоні з робочим органом, який генерує її вібраційно-хвильові збудження. Друга умова у (12) означає, що поверхня суміші $x = h \equiv l$ вільна від напружень.

Реакцію (точніше, силу реакції) суміші у контактній зоні визначаємо зі співвідношення:

$$R_c(0,t) = \sigma(0,t)\cdot S = -E\cdot S\cdot(1 + i\cdot\gamma)\cdot\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0},\tag{14}$$

де S – площа контактної поверхні суміші з робочим органом.

Беручи Re – частину від виразу (14), матимемо:

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\left(R_c(0,t)\right) = E\cdot S\cdot\sqrt{1+\gamma^2}\cdot\cos(\mathrm{arctg}\,\gamma)\cdot D\;; \\ \mathrm{D} = -\mathrm{A}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega\cdot l}{a}\right)\cdot\frac{\omega}{a}\cdot\sin\,\omega\cdot t + \frac{2\cdot A\cdot\omega\cdot a\cdot\pi}{l^2}\cdot\sum\limits_{\tilde{k}=1}^{\infty}\left\{\frac{\left[(-1)^{\tilde{k}} + 1 + (-1)^{\tilde{k}+1}\cdot\cos\left(\frac{\omega\cdot l}{a}\right)\right]}{\omega^2 - \left(\frac{\tilde{k}\cdot\pi\cdot a}{l}\right)^2}\right\}\cdot\tilde{k}\cdot\sin\left(\frac{\tilde{k}\cdot\pi\cdot a\cdot t}{l}\right).\end{cases}\tag{15}$$

Приєднану масу суміші $m_{приєдн.}$, що бере участь у її коливаннях та процесах хвилеутворень, знаходимо з таких міркувань.

Розглядаючи процедуру виведення рівняння (1), легко встановити, що:

$$dm(t) = \frac{E\cdot(1 + i\cdot\gamma)\cdot S\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot dx}{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}.\tag{16}$$

Звідки

$$m(t) = E\cdot S\cdot\left(1+\gamma^2\right)^{1/2}\cdot\cos(\mathrm{arctg}\gamma)\cdot\int_0^l\frac{\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]}{\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right]}dx.\tag{17}$$

Підставляючи у підінтегральний вираз (17) похідні по часу t й координаті x (другого порядку), обчислені з виразу (13), отримаємо узагальнений вирах для $m(t)$, за яким можна встановити миттєве значення маси суміші, яка бере участь у коливаннях та хвилеутвореннях цієї дискретно-континуальної системи.

Для визначення середнього значення маси (приєднаної) суміші за період $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ зовнішнього збурення можна використати таке співвідношення:

$$\overline{m} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} m(t)dt . \tag{18}$$

Розглянемо далі алгоритм визначення динамічних параметрів поверхневих вібромашин в умовах взаємодії їх робочих органів з сумішшю.

Розрахункову модель поверхневої вібромашини показано на рис. 2 [9].

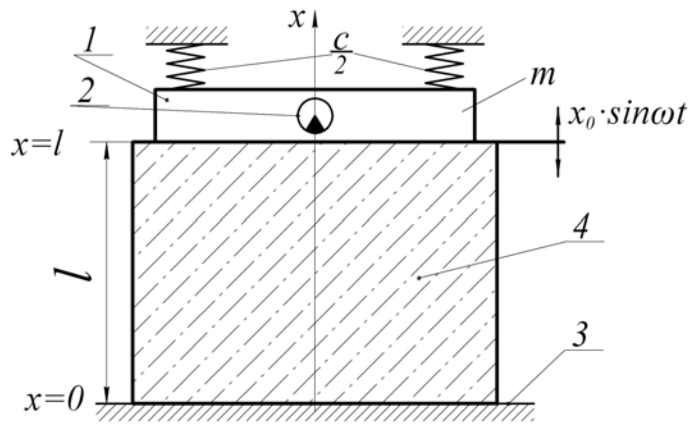

Рис. 2. Розрахункова модель поверхневої вібромашини: 1 – робочий орган; 2 – віброзбудник (дебалансного типу); 3 – піддон; 4 – суміш; $x_0 \equiv A$ – амплітуда; ω – кругова частота коливань віброзбудника; c – жорсткість пружини вібромашини

Використовуючи узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень і вважаючи, що для дискретно-континуальної системи, зображеної на рис. 2, діють такі граничні умови:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0 ; \quad u(x,t)\big|_{x=l} = x_0 \cdot \sin\omega \cdot t = A \cdot \sin\omega \cdot t , \tag{19}$$

для рівняння (1) можна отримати такий загальний розв'язок:

$$u(x,t) = A \cdot \frac{\sin\left(\dfrac{\omega \cdot x}{a}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega \cdot l}{a}\right)} \cdot \sin\omega \cdot t + \frac{2 \cdot A \cdot \omega \cdot a}{l} \cdot \sum_{\tilde{k}=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{\tilde{k}-1}}{\left[\omega^2 - \left(\dfrac{\tilde{k} \cdot \pi \cdot a}{l}\right)^2\right]} \right\} \cdot \sin\left(\frac{\tilde{k} \cdot \pi \cdot a \cdot t}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\tilde{k} \cdot \pi \cdot x}{l}\right) . \tag{20}$$

Вирази (16)–(18) залишаються у силі, необхідно лише підставити у них відповідні похідні по x і t, обчислені з виразу (20).

Для сили реакції суміші у контактній зоні ($x = l$) з робочим органом вібромашини поверхневого типу матимемо:

$$R_c(l,t) = -E \cdot S \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l} . \tag{21}$$

Беручи Re – частину від виразу (21), можна отримати:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left[R_c(l,t)\right] = E \cdot S \cdot \sqrt{1+\gamma^2} \cdot \cos\left(\operatorname{arctg}\gamma\right) \cdot D^*; \\ D^* = -A \cdot \dfrac{\omega}{a} \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\omega \cdot l}{a}\right) \cdot \sin\omega \cdot t + \dfrac{2 \cdot A \cdot \omega \cdot a \cdot \pi}{l^2} \cdot \sum\limits_{\tilde{k}=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{2\cdot\tilde{k}} \cdot \tilde{k}}{\left[\omega^2 - \left(\dfrac{\tilde{k} \cdot \pi \cdot a}{l}\right)^2\right]} \cdot \sin\left(\dfrac{\tilde{k} \cdot \pi \cdot a \cdot t}{l}\right) \end{cases} \quad (22)$$

Висновки: 1. Застосування узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень М.С. Кошлякова – Г.О. Грінберга дає змогу встановити основні параметри та закономірності взаємодії робочого органа вібромашини з ущільнюваною/оброблюваною сумішшю (різного фізичного походження), а також визначити характеристики виникаючих вібраційно-хвильових збуджень (полів) у дискретно-континуальних системах з рухомими границями.

2. Отримані у роботі результати можуть слугувати для уточнення й вдосконалення існуючих методів розрахунку дискретно-континуальних систем (вібромашин для об’ємного/поверхневого формування/ущільнення різноманітних за фізичним походженням сумішей) як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації з метою оптимізації взаємодії робочих органів (їх конструктивно-технологічних параметрів) з оброблюваним середовищем.

1. *Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высш. шк., 1970. – 712 с. 2. Гринберг Г.А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях / Г.А. Гринберг // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31. – Вып. 2 – С. 193–203. 3. Вопросы математической физики / под ред. В.М. Тучкевич. – Л.: Наука, 1976. – 299 с. 4. Крутиков В.С. Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами / В.С. Крутиков. – К.: Наук. думка, 1985. – 128 с. 5. Весницкий А.И. Волновые явления в одномерных системах с движущимися границами. / А.И. Весницкий, А.И. Потапов // Динамика систем. – 1978. – Вып. 13.– С. 38–88. 6. Поздеев В.А. Нестационарные волновые поля в областях с подвижными границами / В.А. Поздеев. – К.: Наук. думка, 1992. – 244 с. 7. Блехман И.И. “Аномальные” явления в жидкости при действии вибрации / И.И. Блехман, Л.И. Блехман, Л.А. Вайсберг, В.Б. Васильков, К.С. Якимова // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 422. – № 4. – С. 470–474. 8. Математическая энциклопедия / под ред. И.М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия, 1979. – Т. 2. – С. 148. 9. Чубук Ю.Ф. Вибрационные машины для уплотнения бетонных смесей / Ю.Ф. Чубук, И.И. Назаренко, В.Н. Гарнец. – К.: Вища шк., 1985. – 168 с.*