

В.О. Малащенко, О.Р. Стрілець, В.М. Стрілець\*  
 Національний університет “Львівська політехніка”,  
 кафедра деталей машин,

\*Національний університет водного господарства та природокористування (м. Рівне),  
 кафедра теплоенергетики та машинознавства

## ДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРУЖНИХ ШПОНКОВИХ З’ЄДНАНЬ З УРАХУВАННЯМ ВТРАТ ЕНЕРГІЇ НА ТЕРТЯ

© Малащенко В.О., Стрілець О.Р., Стрілець В.М., 2012

Розглянуто динамічні властивості пружних шпонкових з’єднань приводів під час передачі ними періодичного, ударного довготривалого і короткотривалого навантаження та їх значного перевантаження, аж до зупинки виконавчого механізму, від вала до маточини, або навпаки, з урахуванням втрат енергії у них на тертя.

**Dynamic properties of transmissions resilient keys connections, during the transition of periodical, forced, permanent and short-term loading and significant overload up to the stoppage of executive device from shaft to hub or other way considering the energy loses caused by friction are observed.**

**Постановка проблеми.** Конструкції з’єднань з пружними призматичними шпонками описані в [1–3], а деякі питання теорії їх розрахунків – у [4–10]. Загальну конструкцію для таких з’єднань показано на рис. 1. Її можна розглядати як принципову схему, загальну для усіх пружних шпонкових з’єднань. Тут вал 1 і маточина 2 (шків, зірочка, зубчасте колесо тощо) з’єднані між собою пружною призматичною шпонкою 3. Пружний зв’язок вала та маточини дає змогу м’яко передавати обертальний момент від вала до маточини, і навпаки, та знизити величину короткочасних перевантажень, тобто згладити різку характеристику урухомника.

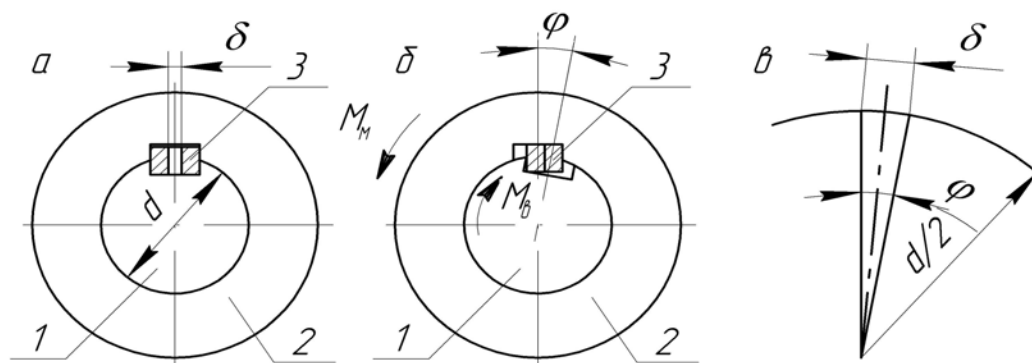


Рис. 1. Схеми роботи з’єднання з пружною призматичною шпонкою: а – до навантаження; б – після навантаження; в – для визначення кута повороту вала стосовно маточини

Однією із основних характеристик пружних шпонкових з’єднань є його жорсткість. Від характеристики жорсткості пружних шпонкових з’єднань залежить здатність приводів механізмів і машин переносити різкі зміни навантажень і працювати без резонансних коливань. Другою важливою властивістю таких з’єднань є їх здатність демпфувати, тобто розсіювати і поглинати надлишкову енергію, яка витрачається на внутрішнє і зовнішнє тертя під час деформації пружних шпонок.

**Мета роботи** – дослідити, як пружні шпонкові з’єднання впливають на динамічні властивості приводу з урахуванням втрат енергії на тертя в сполученні вал-маточина.

**Виклад основного матеріалу.** Для того, щоб вияснити, як пружні шпонкові з’єднання впливають на динамічні властивості приводу і дещо спростити розв’язок задачі, розглянемо з’єднання, схема якого показана на рис. 2, де прийняті такі позначення:  $J_\phi$  – приведений до вала момент інерції мас приводу – двигуна та інших передач, які розташовані до вала приведення;  $J_M$  – приведений до маточини момент інерції мас приводу – від маточини до виконавчого механізму;  $\omega_\phi$  і  $M_\phi$  – кутова швидкість і обертальний момент на валу;  $\omega_M$  і  $M_M$  – кутова швидкість і обертальний момент на маточині;  $C_\phi$  – жорсткість пружного шпонкового з’єднання;  $\alpha$  – коефіцієнт опору.

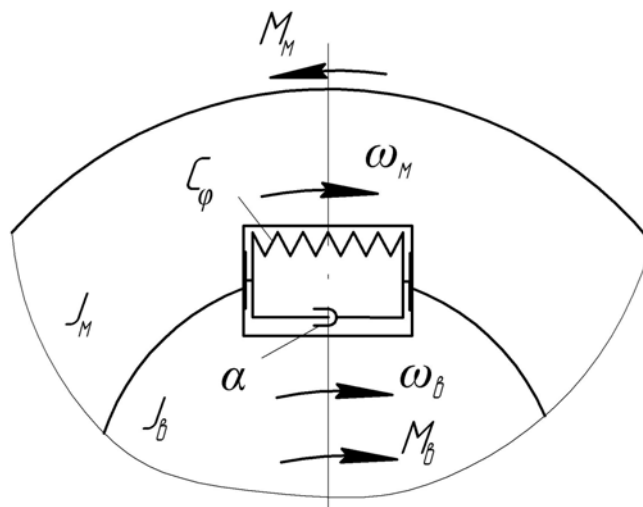


Рис. 2. Схема для вивчення впливу з’єднання на динамічні властивості приводу машини

Додаткові умови:

– пружне шпонкове з’єднання має постійну жорсткість ( $C_\phi = const$ ), а жорсткість усіх інших деталей приводу значно більша. Тому у розрахунках коливань враховується тільки  $C_\phi$ ;

– пружне шпонкове з’єднання має велику демпфуючу здатність, тому потрібно враховувати розсіювання енергії під час складання рівнянь руху;

– привід обладнаний асинхронним двигуном, здатним змінювати крутний момент  $M_\phi$  у широких межах без істотної зміни кутової швидкості  $\omega_\phi$ , тобто  $\omega_\phi = const$ .

Перераховані умови дають змогу розглянути систему (рис. 2) як просту, з одним ступенем вільності.

Розмістимо центр полярних координат на осі вала та прийmemo, що ці осі обертаються з кутовою швидкістю  $\omega_\phi$ . Тоді зможемо описати рух системи за допомогою однієї змінної. Такою змінною буде кут  $\phi_M$  відносного повороту маточини стосовно вала у площині їх обертання, а рівняння руху маси  $J_M$  запишеться у вигляді неоднорідного диференціального рівняння:

$$J_M \frac{d^2 \phi_M}{dt^2} + \alpha \frac{d\phi_M}{dt} + C_\phi \phi_M = M_M. \quad (1)$$

Розв'язки диференціального лінійного неоднорідного рівняння другого порядку (1) виконуються для чотирьох випадків зміни навантажень  $M_m$  виконавчого механізму, графіки яких показані на рис. 3 [11–13]:

- навантаження змінюється періодично упродовж тривалого часу (рис. 3, а);
- величина ударного навантаження після різкого збільшення залишається незмінною упродовж тривалого часу (рис. 3, б);
- величина ударного навантаження після різкого збільшення зберігається протягом малого часу (рис. 3, в);
- виконавчий механізм миттєво зупиняється внаслідок значного перевантаження (рис. 3, г).

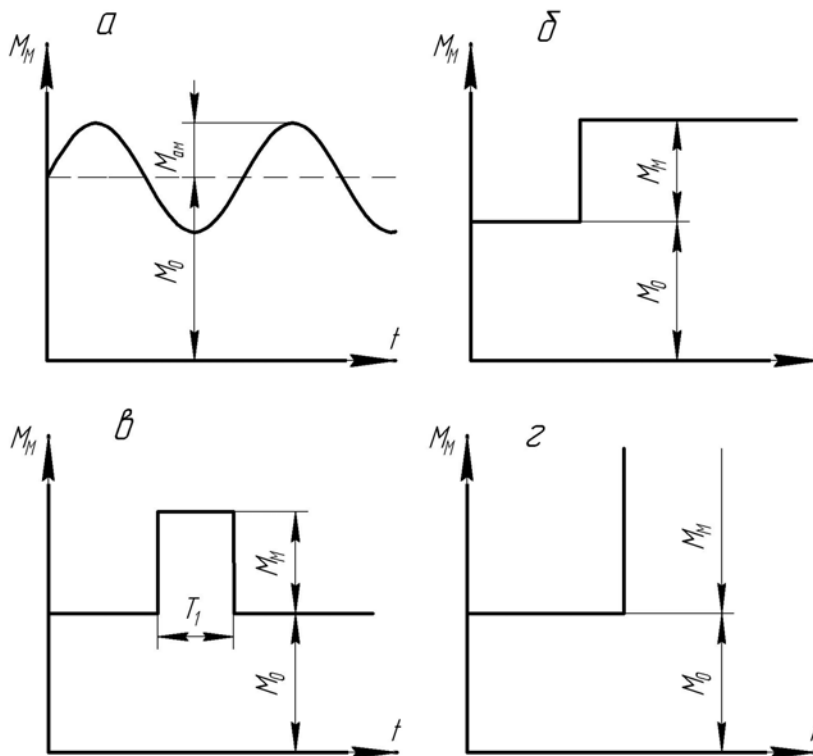


Рис. 3. Графіки навантаження виконавчого механізму

Періодична зміна навантаження є найрозповсюдженішою на практиці. Прийнято, що з достатнім ступенем точності це навантаження можна виразити за допомогою гармонічної функції (рис. 3, а) у вигляді

$$M_m = M_0 + M_{ам} \sin \omega t, \quad (2)$$

де  $M_0$  – стала складова навантаження, номінальний обертальний момент на валу двигуна;  $M_{ам}$  і  $\omega$  – амплітуда та кругова частота періодичного навантаження.

Далі позначимо  $\varphi_m = \varphi_0 + \varphi$  і продиференціюємо їх двічі. Матимемо

$$\frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (3)$$

де  $\varphi_0$  – кут відносного повороту маточини стосовно вала у площині їх обертання, який створюється постійною складовою навантаження.

Враховуючи (3), рівняння (2) набуде такого вигляду:

$$J_m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \alpha \frac{d\varphi}{dt} + C_\varphi \varphi = M_{ам} \sin \omega t \quad (4)$$

або

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n\frac{d\varphi}{dt} + p^2\varphi = q \sin \omega t, \quad (5)$$

де

$$2n = \frac{\alpha}{J_m}; \quad p = \sqrt{\frac{C_\varphi}{J_m}} \quad \text{і} \quad q = \frac{M_{am}}{J_m}. \quad (6)$$

Загальний розв'язок рівняння (5) для вимушених коливань системи з одним ступенем вільності, навантаженої періодичним навантаженням, матиме вигляд [13]:

– у випадку малого опору, коли  $n < p$ :

$$\varphi = Ae^{-nt} \sin(p^*t + \beta) + \frac{1}{J_i p^*} \int_0^t M_{ai} e^{-n(t-t_1)} \sin \omega t_1 \sin p^*(t-t_1) dt_1, \quad (7)$$

де

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{(\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0)^2}{p^2 - n^2}}; \quad p^* = \sqrt{p^2 - n^2}; \quad \beta = \text{arcctg} \frac{\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0}{\varphi_0 \sqrt{p^2 - n^2}};$$

– у разі більшого опору, коли  $n = p$ :

$$\varphi = e^{-nt} [\varphi_0 + (\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0)t] + \frac{1}{J_i p^*} \int_0^t M_{ai} e^{-n(t-t_1)} (t-t_1) \sin \omega t_1 dt_1; \quad (8)$$

– у разі великого опору, коли  $n > p$ :

$$\varphi = Ae^{-nt} \text{sh}(t\sqrt{n^2 - p^2} + \beta) + \frac{1}{J_i \sqrt{n^2 - p^2}} \int_0^t M_{ai} e^{-n(t-t_1)} \sin \omega t_1 \text{sh}\sqrt{n^2 - p^2}(t-t_1) dt_1. \quad (9)$$

Розглянемо випадок, коли величина ударного навантаження після різкого збільшення залишається незмінною упродовж тривалого часу (рис. 3, б).

Рівняння руху маси  $J_m$  буде подібне до (5), в якому праву частину потрібно замінити постійним приростом навантаження  $M_m$ :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n\frac{d\varphi}{dt} + p^2\varphi = q, \quad (10)$$

де

$$q = \frac{M_m}{J_m}. \quad (11)$$

Загальний розв'язок рівняння (10) для вимушених коливань системи із одним ступенем вільності, навантаженої ударним навантаженням, яке залишається незмінним упродовж тривалого часу, має вигляд:

– у разі малого опору, коли  $n < p$ :

$$\varphi = Ae^{-nt} \sin(p^*t + \beta) + \frac{1}{J_m p^*} \int_0^t M_m e^{-n(t-t_1)} \sin p^*(t-t_1) dt_1; \quad (12)$$

– у разі більшого опору, коли  $n = p$ :

$$\varphi = e^{-nt} [\varphi_0 + (\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0)t] + \frac{1}{J_i p^*} \int_0^t M_i e^{-n(t-t_1)} (t-t_1) dt_1; \quad (13)$$

– у разі великого опору, коли  $n > p$  :

$$\varphi = Ae^{-nt} sh(t\sqrt{n^2 - p^2} + \beta) + \frac{1}{J_i \sqrt{n^2 - p^2}} \int_0^t M_i e^{-n(t-t_1)} sh\sqrt{n^2 - p^2} (t - t_1) dt_1. \quad (14)$$

Розглянемо випадок, коли величина ударного навантаження після різкого збільшення зберігається упродовж малого часу (рис. 3, в).

За короткочасних перенавантажень після  $t = T_1$  система буде вільна від додаткового навантаження  $M_m$ . Для дослідження подальшого руху системи (за  $t > T_1$ ) використаємо рівняння (10), враховуючи, що  $q = \frac{M_m}{J_m} = 0$ .

Тоді отримаємо

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2n \frac{d\varphi}{dt} + p^2 \varphi = 0. \quad (15)$$

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (15) для вимушених коливань системи з одним ступенем вільності, навантаженої ударним навантаженням, яке залишається незмінним упродовж малого часу, має вигляд:

– у разі малого опору, коли  $n < p$  :

$$\varphi = Ae^{-nt} \sin(p^* t + \beta); \quad (16)$$

– у разі більшого опору, коли  $n = p$  :

$$\varphi = e^{-nt} [\varphi_0 + (\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0)t]; \quad (17)$$

– у разі великого опору, коли  $n > p$  :

$$\varphi = Ae^{-nt} sh(t\sqrt{n^2 - p^2} + \beta). \quad (18)$$

У разі, коли виконавчий механізм миттєво зупиняється внаслідок значного перевантаження (рис. 3, з), кутова швидкість вала і маточини до перевантаження була стала і така, що дорівнювала  $\omega_g$ . Після зупинки (урухомник не вимкнений) система буде навантажена пусковим моментом електродвигуна  $M_{пуск}$ . З метою спрощення розв'язку приймаємо, що  $M_{пуск} = M_n$ . При цьому сталу складову кута повороту маточини стосовно вала у площині їх обертання  $\varphi_0$  виключаємо із розгляду, а рух маси  $J_g$  описуватиметься рівнянням вільних коливань (11) з початковими умовами: за  $t = 0$ ,  $\varphi = 0$  і  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_g$ . Розв'язок (11) дає змогу стверджувати, що величина додаткового моменту, який діє на систему в результаті її раптового гальмування, прямо пропорційна до частоти вільних коливань системи  $p$ .

**Висновки.** На основі комп'ютерного аналізу отриманих розв'язків диференціальних рівнянь, що описують динамічні процеси у пружних шпонкових з'єднаннях приводів з врахуванням втрат енергії на тертя у сполученні вал-маточина під час передачі ними періодичного, ударного тривалого і короткотривалого навантаження зі значним перевантаженням, аж до зупинки виконавчого механізму, зроблені такі висновки:

1. У разі, коли  $n < p$  і  $n = p$ , потрібно приймати меншу жорсткість пружного шпонкового з'єднання, що за інших рівних умов сприяє зменшенню перевантаження приводу.

2. Коли  $n > p$ , тоді з'єднання вал-маточина навіть з пружною шпонкою стає жорстким, що зумовлено значним тертям між валом і маточиною, що сприяє збільшенню перевантаження, яке може досягати значних величин і викликати руйнування елементів приводу.

3. Установлено, що жорсткість пружної шпонки була завжди дещо більшою за жорсткість з'єднання вал-маточина за рахунок сили тертя.

1. Малащенко В.О. Обґрунтування нової класифікації шпонкових з'єднань / В.О. Малащенко, О.Р. Стрілець, В.М. Стрілець // Підйомно-транспортна техніка. – Дніпропетровськ, 2009. – № 4. – С. 124–130. 2. Пат. 61951 Україна, МПК F 16 В 3/00. Пружна призматична шпонка / Стрілець О.Р., Малащенко В.О., Стрілець В.М; заявники і власники патенту Національний університет водного господарства та природокористування і Національний університет „Львівська політехніка”. – и № 2010 14574; заявл. 06.12.10; опубл. 10.08.11, Бюл. №15, 2011 р. 3. Пат. 62872 Україна, МПК F 16 В 3/00. Пружна призматична шпонка / Стрілець О.Р., Малащенко В.О., Стрілець В.М; заявники і власники патенту Національний університет водного господарства та природокористування і Національний університет „Львівська політехніка”. – и №2010 14575; заявл. 06.12.10; опубл. 26.09.11, Бюл. №18, 2011 р. 4. Малащенко В.О. Навантажувальна здатність пружних шпонкових з'єднань типу вал-маточина / В.О. Малащенко., О.Р. Стрілець, В.М. Стрілець // Вісник НТУ „ХПІ”: Збірник наукових праць. – Тематичний випуск „Проблеми механічного приводу”. – Харків: НТУ „ХПІ”. – 2010. – № 26. – С. 65–71. 5. Малащенко В.О. Статичні розрахунки деяких призматичних пружних шпонок / В.О. Малащенко., О.Р. Стрілець, В.М. Стрілець // матер. Міжнар. наук.-техн. конф. „Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій” (м. Тернопіль, 19–21 травня 2010 р.). – Тернопіль: ТНТУ, 2010. – С. 68–69. 6. Малащенко В.О. Деякі питання динаміки з'єднань типу вал-маточина з пружними призматичними шпонками / В.О. Малащенко., О.Р. Стрілець, В.М. Стрілець // пр. 2-ї Міжнар. наук.-техн. конф. „Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій” (м. Львів, 11–13 листопада 2010 р.). – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2010. – С. 140–142. 7. Малащенко В.О. Обґрунтування кінематико-силових параметрів з'єднань з пружними шпонками / В.О. Малащенко, О.Р. Стрілець, В.М. Стрілець // MOTROL Motorization and power industry in agricultur. – T.12 V. – Lublin, 2010. – С. 145–152. 8. Малащенко В.О. Динамічні характеристики пружних шпонкових з'єднань типу вал – маточина / В.О. Малащенко, О.Р. Стрілець, В.М. Стрілець // Вісник НТУ „ХПІ”: зб. наук. пр. Темат. вип.: „Проблеми механічного приводу”. – Харків: НТУ „ХПІ”. – 2011, № 28. – С. 92–99. 9. Малащенко В.О. Навантаження та деформації призматичних шпонок з пружними вставками / В.О. Малащенко, О.Р. Стрілець, В.М. Стрілець // Вісник Національного університету „Львівська політехніка” „Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – 2011. – № 701. – С. 69–74. 10. Малащенко В.О. Підвищення навантажувальної здатності пружних призматичних шпонок / В.О. Малащенко, В.М. Стрілець, О.Р. Стрілець // Підйомно-транспортна техніка. – Дніпропетровськ, 2011. – № 1. – С. 79–88. 11. Комаров М.С. Динаміка механізмів и машин / М.С. Комаров. – М.: Машиностроєніє, 1968. – 351 с. 12. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т.2. – 655 с. 13. Яблонский А.А. Курс теории колебаний / А.А. Яблонский, С.С. Норејко. – М.: Высш. шк., 1975. – 248с.