УДК 519.3; 629.7

В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич, Ю.В. Ловейкін*
Національний університет біоресурсів і природокористування України,
*Київський національний університет імені Тараса Шевченка

АНАЛІЗ ПРЯМИХ ВАРІАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Проаналізовано прямі варіаційні методи, які використовуються для розв'язування задач оптимального керування. Запропоновано наближений прямий варіаційний метод, який дає змогу значно спростити розв'язки задач оптимального керування і отримати достатню точність розв'язків під час практичного використання у реальному часі керування механічними системами.

Direct variation methods which are used for the decision of optimum controlproblems have been analyzed. The confidant a direct variation method which allows to simplify considerably the decision of optimum controlproblem is offered and to receive sufficient accuracy of the decision in practical use in real time of mechanical systemscontrol.

Постановка проблеми. Велика кількість технічних, економічних, соціальних та систем іншої природи можуть бути описані за допомогою диференціальних рівнянь. Такі диференціальні рівняння є, по суті, математичними моделями вказаних систем. Еволюція динамічних систем, на які можна справляти певний вплив, як правило, подається неоднорідними диференціальними рівняннями, права частина яких є керуванням. Отже, існує можливість керувати динамічними системами, однак таке керування необхідно у певний спосіб вибрати із усієї множини допустимих керувань. Критерієм вибору є деякий показник, який називається критерієм оптимізації і який математично подається термінальним чи інтегральним функціоналом. Завдання вибору такого керування, за якого динамічна система переходить із одного стану в інший, за екстремізації критерію оптимізації називається задачею оптимального керування. Різні математичні методи дають різні необхідні та достатні умови оптимальності процесу керування: варіаційне числення – рівняння Ейлера–Пуассона; принцип максимуму – умова максимуму Гамільтоніана; динамічне програмування – функціональне рівняння Беллмана тощо.

У подальшому розглядатимемо процес розв'язку задачі оптимального керування за допомогою класичного варіаційного числення. Рівняння Ейлера–Пуассона, яке є необхідною умовою екстремуму функціонала, різних оптимізаційних задач, інтегруються у кінцевому вигляді лише у небагатьох випадках [1]. У зв'язку з цим виникає потреба в інших методах розв'язку цих задач. Основна ідея прямих методів полягає у тому, що варіаційна задача розглядається як гранична для деякої задачі на екстремум функції кінцевого числа змінних. Ця задача на екстремум функції кінцевого числа змінних розв'язується звичайними методами, а потім граничним переходом отримується розв'язок відповідної варіаційної задачі.

Різниця між прямими методами та аналітичними методами розв'язування варіаційних задач полягає у тому, що у другому випадку спочатку знаходять множину екстремалей, а потім із цієї множини виділяють ту екстремаль (шляхом підбору крайових умов), яка задовольняє початкові та кінцеві координати фазового простору. Однак до розв'язування задач оптимального керування можна підійти і з іншого боку – спочатку знаходять множину допустимих кривих, за яких система переходить з початкового у кінцевий стан, а потім з цієї множини кривих обирають ту, яка мінімізує (максимізує) заданий функціонал [2].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Для оптимізації режимів руху динамічних систем використовуються різноманітні математичні методи. Найстарішим серед вказаних методів є метод варіаційного числення [1], зародження і розвиток якого пов'язаний з іменами Ейлера, Лагранжа, Пуассона, Вейерштрасса та інших учених. Одним із найвідоміших методів для розв’язування задач оптимального керування є принцип максимуму [3], розроблений Л.С. Понтрягіним та його учнями. Цей метод дає змогу врахувати обмеження, накладені на керування динамічною системою. Потужним методом для розв’язування задач оптимального керування є динамічне програмування [4]. Автором цього методу є американський математик Р. Беллман. Крім вказаних методів, також використовується метод моментів [5], розвиток якого пов’язаний з ім’ям академіка М.М. Красовського. Відома також теорема В.Ф. Кротова про достатні умови оптимальності процесу керування [6].

Усі перераховані методи дають змогу знаходити оптимальне керування у вигляді функції часу і лише деякі з них – у вигляді оптимального зворотного зв’язку (задача синтезу оптимального керування).

Розроблений значний клас наближених методів розв’язування задач оптимального керування. Серед цього класу наближених методів існує підклас, який можна назвати „варіаційним” – це ті методи, які безпосередньо мінімізують функціонал на множині допустимих траєкторій руху системи.

Формулювання мети дослідження. Метою наведеного дослідження є аналіз прямих варіаційних методів розв’язку задач оптимального керування. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання: 1) викласти сутність прямих варіаційних методів (Ейлера, Рітца, Канторовича); 2) навести методику розв’язання задач за допомогою прямого варіаційного методу; 3) навести приклад оптимізації режиму руху одномасової динамічної моделі.

Виклад основного матеріалу. Наведемо найпростіший інтегральний функціонал деякої варіаційної задачі:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} P(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))dt, \tag{1}$$

де P – підінтегральна функція; t_0 та t_1 – межі інтегрування (для задач оптимального керування початок та кінець оптимального процесу відповідно); $x(t)$ – функція, від якої залежить значення функціонала (крапка над символом означає диференціювання за часом), можна розглядати як функцію нескінченної кількості змінних. Це твердження стає очевидним, якщо припустити, що допустимі функції можуть бути розкладені у степеневі ряди, у ряди Фур’є або взагалі у деякі ряди вигляду

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n(t), \tag{2}$$

де $\varepsilon_n(t)$ – задані функції; a_n – коефіцієнти при функціях. Отже, для задання функції у вигляді ряду (2) достатньо задати значення усіх коефіцієнтів a_n, і значення функціонала (1) у цьому випадку визначається заданням нескінченної послідовності чисел: $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots a_n$, тобто функціонал є функцією нескінченної кількості змінних: $I = I(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ldots,x^{(n)}(t)) = j\,(a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots a_n)$.

Отже, відмінність між варіаційними задачами і задачами на екстремум функцій кінцевого числа змінних полягає у тому, що у варіаційному випадку доводиться досліджувати на екстремум функцію нескінченної кількості змінних.

У багатьох випадках виконати граничний перехід за $n \to \infty$ не вдається, тому переважно обмежуються невеликим числом $n = 3,\ 4,\ 5,$ а інколи навіть $n = 1$. Звичайно, чим більше n, тим краще значення функціонала наближається до екстремуму.

Якщо прямими методами визначається абсолютний мінімум функціонала, то наближене значення мінімуму функціонала знаходиться з надлишком. При знаходженні прямими методами максимального значення функціонала отримаємо наближене значення функціонала з недостатком.

Прямі варіаційні методи можна використовувати для функціоналів кількох аргументів $I = I(x(t_1, t_2, ..., t_n))$ або кількох функціональних аргументів $I = I(x(t), y(t), ..., w(t))$.

Ейлер перший у своїх працях в області варіаційного числення використовував метод, який тепер називається кінцево-різницевим прямим методом. Цікаво відзначити, що саме за допомогою цього методу Ейлер у 1744 році вивів знамените рівняння, яке є необхідною умовою екстремуму найпростішого функціонала (1) і яке носить його ім’я [1].

Суть цього методу полягає у тому, що значення функціонала, наприклад:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} P(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))dt, \qquad x(t_0) = a, \quad x(t_1) = b, \tag{3}$$

розглядаються не на довільних у цій варіаційній задачі кривих, а лише на ламаних, які складені з заданої кількості n прямолінійних ділянок, з заданими абсцисами вершин $t_0 + \Delta t,\ t_0 + 2\Delta t, ..., t_0 + (n-1)\Delta t$, де $\Delta t = \dfrac{t_1 - t_0}{n}$.

На таких ламаних функціонал перетворюється у функцію ординат $I = j\,(x_1,\ x_2, ..., x_{n-1})$ вершин ламаної, оскільки ламана визначається цими координатами. Обираємо координати так, щоб функція $I = j\,(x_1,\ x_2, ..., x_{n-1})$ досягала екструмуму, тобто $x_1,\ x_2, ..., x_{n-1}$ визначаємо з системи рівнянь:

$$\frac{\partial j}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial x_2} = 0, ..., \quad \frac{\partial j}{\partial x_{n-1}} = 0. \tag{4}$$

Визначивши орданати ламаної, отримаємо наближений розв’язок варіаційної задачі. Граничним переходом за $n \to \infty$ можемо отримати точний розв’язок варіаційної задачі.

Зручніше, однак, значення функціонала I на вищевказаних ламаних обчислювати наближено, наприклад, у найпростішій задачі заміняти інтеграл (3) інтегральною сумою:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} P(t_i,\ \ x_i,\ \frac{\Delta x_i}{\Delta t}). \tag{5}$$

До недоліків цього методу необхідно зарахувати те, що розв’язком варіаційної задачі є ламана крива, складена з прямих, що означає розривність похідної у точках, які відповідають ординатам $x_1,\ x_2, ..., x_{n-1}$. Тому реалізація оптимального за критерієм (3) закону руху деякої (технічної) системи на практиці є складною задачею. Збільшуючи кількість ординат n, можна деякою мірою усунути цей недолік, але тоді збільшується обсяг і складність обчислень.

Ще одним, доволі розповсюдженим, прямим варіаційним методом є метод, запропонований Рітцом [7]. Ідея цього методу полягає у тому, що значення деякого функціонала розглядається не на довільних допустимих кривих цієї варіаційної задачі, а лише на лінійних комбінаціях

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i W_i(t) \tag{6}$$

зі сталими коефіцієнтами, які складені з функцій на деякій обраній послідовності функцій: $W_1(t),\ W_2(t), ..., W_n(t) \ldots$ Ці функції повинні бути допустимими у розглядуваній задачі, що накладає деякі обмеження на вибір послідовності $W_1(t),\ W_2(t), ..., W_n(t)$. На таких лінійних комбінаціях функціонал перетворюється у функцію $I = j\,(b_1,\ b_2, ..., b_n)$ коефіцієнтів $b_1,\ b_2, ..., b_n$. Ці коефіцієнти обираються так, щоб функціонал досягав екстремуму, отже, $b_1,\ b_2, ..., b_n$ повинні бути визначені з системи рівнянь:

$$\frac{\partial j}{\partial b_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2, ..., n). \tag{7}$$

Виконуючи граничний перехід за $n \to \infty$ отримаємо, у випадку існування границі, функцію $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i W_i(t),$ яка є точним розв’язком розглядуваної варіаційної задачі.

До недоліків методу необхідно зарахувати необхідність відшукувати функції $W_1(t),\ W_2(t),...,W_n(t)$, які повинні відповідати крайовим умовам. У деяких випадках це доволі складно виконати, особливо за неоднорідних крайових умов з заданням значень вищих похідних. Крім того, необхідно пам’ятати про вимоги гладкості та неперервності функцій, що досить часто вимагається за умовами задачі.

Метод Канторовича використовується для знаходження функції, яка доставляє екстремум функціонала і яка, крім того, залежить від кількох аргументів [8]. Цей метод де в чому схожий з попередньо розглянутим методом Рітца. За ним також необхідно обрати координатну систему функцій, які є функціями кількох аргументів $W_1(t_1, t_2,..., t_n),\ W_2(t_1, t_2,..., t_n),...,W_n(t_1, t_2,..., t_n),$ і наближений розв’язок варіаційної задачі шукається у вигляді:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x_m) W_i(t_1,\ t_2,...,\ t_n), \tag{8}$$

однак коефіцієнти $h_i(x_m)$ не сталі, а є незалежними функціями однієї з незалежних змінних. Функціонал на класі функцій вигляду (8) перетворюється у функціонал $\tilde{I}(h_1(x_m),\ h_2(x_m),...,h_i(x_m))$, який залежить від *n* функцій однієї незалежної змінної $h_1(x_m),\ h_2(x_m),...,h_i(x_m)$. Ці функції обираються так, щоб функціонал $\tilde{I}(h_1(x_m),\ h_2(x_m),...,h_i(x_m))$ набував екстремуму. При цьому необхідно розв’язати систему з m рівнянь Ейлера–Пуассона для функціонала $\tilde{I}(h_1(x_m),\ h_2(x_m),...,h_i(x_m))$, який після інтегрування за усіма аргументами, окрім x_m, перетворюється у функціонал, в який входить лише один аргумент. Знайшовши функції $h_i(x_m)$, які є екстремалами функціонала $\tilde{I}(h_1(x_m),\ h_2(x_m),...,h_i(x_m))$, та підставляючи їх у вираз (8), отримаємо наближений розв’язок варіаційної задачі.

Якщо здійснити перехід $n \to \infty$, то за деяких умов можна отримати точний розв’язок, якщо ж граничного переходу не здійснювати, то цим методом буде отримано наближений розв’язок, причому значно точніший, ніж за використання методу Рітца з тими самими координатними функціями і з тією самою кількістю параметрів *n*. Це викликано тим, що клас функцій (8) зі змінними $h_i(x_m)$, значно ширший від класу функцій (6), де коефіцієнти b_i сталі. Отже, серед функцій (8) можна підібрати функції, які краще апроксимують розв’язок варіаційної задачі, ніж серед функцій (6).

Наведені вище прямі варіаційні методи не вичерпують усю їх множину. Це лише „класичні” методи, які були розроблені раніше від інших і які доволі широко використовуються. Однак з’являються нові прямі методи, що вказує на актуальність проблем, які вирішуються методами варіаційного числення. Ми не зможемо дати вичерпну інформацію щодо прямих методів, деякі з них описані у [9–17].

Викладемо сутність одного із прямих методів розв’язування варіаційних задач. Нехай потрібно знайти екстремум функціонала, у підінтегральний вираз якого входить похідна k-го порядку. При цьому рівняння Ейлера–Пуассона є рівнянням $2k$-го порядку. Тому для його розв’язування необхідно задати $2k$ крайових умов (наприклад, k умов на початку руху та k – в кінці). Новий спосіб визначення оптимальної траєкторії руху системи полягає у тому, щоб розв’язати диференціальне рівняння ($2k+p+r$)-го порядку:

$$\overset{(2k+p+r)}{x} = 0, \tag{9}$$

де p – кількість додаткових крайових умов, які необхідно поставити для покращання умов руху системи (на початку і/або у кінці руху системи), тобто для усунення „жорстких” ударів [18] (у частинному випадку може бути $p=0$); r – кількість додаткових умов, які ставляться в інтервалі [t_0, t_1], позначимо через q_1, q_2,…, q_r. В такий спосіб розв’язок диференціального рівняння містить r параметрів. Тепер можемо визначити інтеграл (1), у який також входитимуть r параметрів. Тобто функціонал (1) перетворюється у функцію параметрів q_1, q_2,…, q_r. Далі диференціюємо функціонал $I = j\,(q_1,\ q_2,...,q_r)$ за параметрами q_1, q_2,…, q_r і розв’яжемо систему рівнянь:

$$\frac{\partial j}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,...,r). \tag{10}$$

Підставляючи визначені значення q_1, q_2,…, q_r у розв’язок диференціального рівняння (9) і спрощуючи його, отримаємо наближений розв’язок варіаційної задачі.

Необхідно зазначити, що постановку додаткових r умов можна робити кількома способами: 1) задати значення функції у різні моменти часу, наприклад, $x(\frac{i(t_1 - t_0)}{r+1}) = q_i,\ i = 1, 2,...,r$; 2) задати значення функції та її вищих похідних в один конкретний момент часу, наприклад, посередині інтервалу [t_0, t_1] $x^{(i)}(\frac{t_1 - t_0}{2}) = q_i,\ i = 0, 1,...,r-1$; 3) задати значення функції та її вищих похідних у різні моменти часу (поєднання двох попередніх способів). Усі способи задання додаткових умов приводять до одних і тих самих результатів.

Основна перевага наведеного прямого варіаційного методу полягає у тому, що наближений розв’язок варіаційної задачі шукається у класі функцій, до яких належить і точний розв’язок. Крім того, відпадає необхідність шукати послідовність функцій, на яких функціонал набуває екстремуму. Усе це полегшує розрахунки. До переваг цього методу можна зарахувати і те, що є можливість визначити закони руху механізмів з „пом’якшеними” кінематичними та динамічними характеристиками, що дуже важливо для сучасних механізмів та машин, і чого в деяких випадках неможливо досягти навіть точними розв’язками варіаційних задач (за допомогою інтегрування рівняння Ейлера–Пуассона).

Наведемо детальний опис методики, за якою здійснюється оптимізація режимів руху механічних систем за допомогою наведеного прямого варіаційного методу. Насамперед необхідно задатись режимом руху системи, для якого буде проведена оптимізація. Далі потрібно визначитись з метою оптимізації, тобто чітко сформулювати, для чого вона проводиться і які результати в процесі оптимізації повинні бути досягнуті. Формально цей крок означає встановлення виду критерію (інтегрального чи термінального) та виразу, який входить у критерій і який визначає його характер. Для різних режимів руху системи характерними є різні критерії (наприклад, для режиму розгону критерієм може бути привідне зусилля, що діє на систему, а для усталеного руху – різниця між реальними координатами механічної системи та заданими за програмою руху). Нехай критерій руху механічної системи заданий у вигляді інтегрального функціонала:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} P(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),..., \overset{k}{x}(t))dt, \tag{11}$$

де k – максимальний порядок похідної функції $x(t)$, яка входить у підінтегральний вираз P критерію (11), який відображає небажані характеристики руху системи протягом періоду часу [t_0, t_1], і тому такий критерій повинен бути мінімізований. Умовою мінімуму функціонала (11) є рівняння Ейлера–Пуассона, яке подається диференціальним рівнянням $2k$-го порядку.

Оптимізація режиму руху системи за прямим варіаційним методом полягає у тому, що шукають розв’язок диференціального рівняння (9). Пояснимо вибір порядку диференціального рівняння (9). Рівняння Ейлера–Пуассона, яке є умовою мінімуму критерію (2.13), має порядок $2k$. Тому порядок рівняння (9) повинен бути не меншим за порядок рівняння Ейлера–Пуассона. Якщо ця умова не виконується, то неможливо буде визначити закон руху системи, який задовольняє фізичні умови її руху. Однак часто буває так, що постановка фізичних крайових умов призводить до того, що знайдений за їх допомогою оптимальний режим руху системи не задовольняє певних вимог, наприклад, щодо плавності руху (на початку або у кінці руху системи). Це може спричинити додаткові динамічні навантаження у механізмах та, як наслідок, викликати передчасне виведення їх з ладу. Тому у прямому варіаційному методі додатково ставляться p крайових умов, які б враховували ці вимоги.

Постановка додаткових r крайових умов, під час розв'язування рівняння (9) пояснюється так: вони дають змогу „ввести” у розв'язок рівняння (9) r параметрів q_1, $q_2,\ldots$, q_r. В такий спосіб розв'язок рівняння (9) залежатиме від $2k$ крайових умов, які задаються з фізичних міркувань, p додаткових умов, які задаються з міркувань покращення режиму руху механічної системи та r додаткових умов, які у подальшому використовуватимуться для знаходження наближеного розв'язку варіаційної задачі. Оскільки $2k$ та p крайових умов відомі, то необхідно задати лише параметри q_1, $q_2,\ldots$, q_r, щоб однозначно отримати шуканий розв'язок рівняння (9). Ці параметри можна задати довільно. Однак метою прямого варіаційного методу є отримання наближеного розв'язку варіаційної задачі. Очевидно, що такий наближений розв'язок повинен з достатнім ступенем точності відповідати умові екстремізації функціонала, в який він входить (доставляти екстремум функціонала). Тому можна використати r додаткових параметрів, які входять у функцію, яка є розв'язком рівняння (9), для того, щоб наблизити цю функцію до розв'язку варіаційної задачі (до екстремалі функціонала). Як це зробити? Потрібно за допомогою функції-розв'язку рівняння (9) сформувати підінтегральний вираз інтеграла (11), при цьому необхідно взяти відповідні похідні за часом, включно до k-ї: $P(t, x(t, q_1,\ q_2,...,q_r), \dot{x}(t, q_1,\ q_2,...,q_r),..., \overset{k}{x}(t, q_1,\ q_2,...,q_r))$. Після цього необхідно знайти визначений інтеграл (11) (сформувати вираз інтеграла). У вираз цього інтеграла входитимуть параметри q_1, $q_2,\ldots$, q_r. Отже, ном інтеграл перетворюється у функцію цих параметрів. Щоб знайти екстремум функції багатьох змінних, необхідно розв'язати систему рівнянь (10). Розв'язки цієї системи – вирази параметрів q_1, $q_2,\ldots$, q_r – необхідно підставити у функцію-розв'язок диференціального рівняння (9). В такий спосіб ця функція позбавляється невідомих параметрів q_1, $q_2,\ldots$, q_r і доставляє наближений екстремум функціонала (11).

Далі наведемо задачу, яка розв'язана за допомогою прямого варіаційного методу. Нехай динаміка руху системи описується найпростішим диференціальним рівнянням:

$$m_n \ddot{x} = F_{дин}, \tag{12}$$

де $F_{дин}$ – динамічна складова привідного зусилля; m_n – приведена до поступального руху маса механізму; x – узагальнена лінійна координата механізму. На величину $F_{дин}$ накладено обмеження у вигляді нерівності:

$$F_{дин} \le F_{\max}, \tag{13}$$

де $F_{\max}$ – максимально допустиме значення динамічної складової привідного зусилля. Фізичний зміст обмеження (13) полягає у тому, що момент (а відповідно і зусилля), який діє на механізм з боку проводу, є обмеженим деякою величиною, наприклад, критичним моментом в асинхронному двигуні.

Джерелом зовнішньої силової дії машини є привідний механізм. Одним з найпоширеніших приводів є електричний, зокрема від асинхронного двигуна з короткозамкненим ротором. У асинхронних двигунів електричні витрати пропорційні до квадрата рушійного моменту на валу [19], тому актуальною є задача мінімізації цього показника протягом перехідних режимів руху механізму, оскільки у цих режимах динамічна складова моменту, а відповідно і сили, які діють на механізм, є максимальними. Отже, виникає потреба у розв'язанні варіаційної задачі, в якій необхідно мінімізувати інтегральний функціонал такого вигляду:

$$I = \int_0^{t_1} F_{дин}^2\, dt = \int_0^{t_1} (m_п \ddot{x})^2\, dt \to \min, \tag{14}$$

де t_1 – тривалість розгону механізму (машини).

Розв'яжемо варіаційну задачу – мінімізуємо функціонал за виразом (14), враховуючи обмеження на максимальну величину динамічного зусилля (13). Для того, щоб виконувалась нерівність (13), можна виконати заміну змінних відповідно до рівняння:

$$M^2 = F_{\max} - F_{дин} = F_{\max} - m_n \ddot{x}, \tag{15}$$

де M – деяка фіктивна змінна. Заміна, виконана за виразом (15), виконується відповідно до відомого методу Валентайна [20]. З рівняння (15) можемо виразити $m_n \ddot{x}$ та записати, чому дорівнює функціонал за формулою (14):

$$I = \int_0^{t_1} F_{дин}^2 dt = \int_0^{t_1} (F_{\max} - M^2)^2 dt \to \min. \tag{16}$$

Рівняння Ейлера–Пуассона для наведеного функціонала набуває такого вигляду:

$$M(M^2 - F_{\max}) = 0, \tag{17}$$

тобто, по суті, воно розпадається на два рівняння: $M = 0$ та $(M^2 - F_{\max}) = 0$. Отже, можна зробити висновок: екстремум функціонала з урахуванням обмежень (13) може досягатись лише на кривих, які складені з ділянок екстремалей і ділянок межі допустимої області (у частинних випадках довжина ділянок екстремалей або ділянок межі області може перетворюватись у нуль) [20].

Знайдемо функцію, яка доставляє мінімум функціонала (16) новим прямим варіаційним методом. Для цього розв'яжемо диференціальне рівняння третього порядку:

$$\dddot{M} = 0, \tag{18}$$

за крайових та додаткових умов:

$$\begin{cases} M(0) = \sqrt{F_{\max}}; \\ M(\frac{t_1}{2}) = q_1; \\ M(t_1) = \sqrt{F_{\max}}. \end{cases} \tag{19}$$

де q_1 – параметр, за яким здійснюється мінімізація функціонала (16) і який потребує визначення. Початкова та кінцева умови (19) вибрані так, щоб початкове та кінцеве прискорення (відповідно і динамічні зусилля) механізму дорівнювали нулю. Запишемо розв'язок рівняння (18):

$$M = \frac{\sqrt{F_{\max}}(t_1 - 2t)^2 + 4q_1 t(t_1 - t)}{t_1^2}. \tag{20}$$

Підставимо отриманий результат (20) у функціонал (16) та запишемо його кінцевий вираз:

$$I = \int_0^{t_1} F_{дин}^2 dt = \frac{32}{315}(\sqrt{F_{\max}} - q_1)^2 (7F_{\max} + 10\sqrt{F_{\max}} q_1 + 4q_1^2) t_1. \tag{21}$$

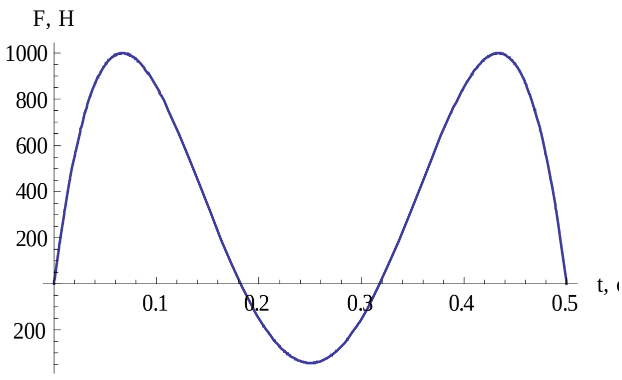
Візьмемо похідну з цього виразу за параметром q_1 та прирівняємо її до нуля, в результаті чого матимемо:

$$\frac{\partial I}{\partial q_1} = -\frac{64}{315}(2F_{\max}^{\frac{3}{2}} + 9F_{\max} q_1 - \sqrt{F_{\max}} q_1^2 - 8q_1^3) t_1 = 0. \tag{22}$$

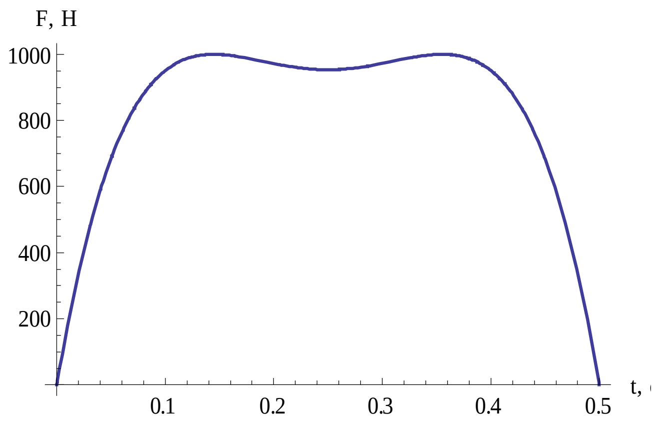
Рівняння (22) має три корені:

$$\begin{cases} q_{1,\ 1} = \sqrt{F_{\max}}; \\ q_{1,\ 2,3} = \frac{1}{16}(-11 \pm \sqrt{57})\sqrt{F_{\max}}. \end{cases} \tag{23}$$

Перший корінь (23) відкидаємо, оскільки підставивши його у вираз (20), отримаємо тривіальний (нульовий) результат. Оберемо лише один корінь та працюватимемо з ним. Для цього побудуємо графіки функцій для динамічного зусилля, отриманого підстановкою другого та третього коренів (23) у рівняння (20) із врахуванням виразу (15) За параметрів $F_{\max} = 1000\,H$, $v = 1\,м/с$, $m_n = 1000кг$, $t_1 = 0{,}5с$ (рис. 1).



а



б

Рис. 1. Графік функції динамічного зусилля, яке діє на механізм за $q_{1,\,2}$ *(а) та за*

$$\frac{\partial j}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial j}{\partial x_{n-1}} = 0 \quad (б)$$

Оберемо третій корінь $q_{1,\,3}$, оскільки він дає результат, за яким динамічне зусилля не змінює свого знака, що є бажаним під час реалізації закону керування на практиці. Запишемо залежність динамічного зусилля з урахуванням виразу (15) для третього кореня $q_{1,\,3}$:

$$F_{дин} = F_{\max} - \frac{F_{\max}(-(-27+\sqrt{57})t^2 + (-27+\sqrt{57})tt_1 + 4t_1^2)}{16t_1^4}. \tag{24}$$

Оскільки динамічне зусилля дорівнює добутку приведеної маси механізму або машини на її прискорення, то подвійним інтегруванням виразу (12) за нульових початкових умов $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ отримаємо шуканий закон руху:

$$x = \frac{F_{\max} t^3}{480 m_n t_1^4}(6(-131+9\sqrt{57})t^3 + 18(131-9\sqrt{57})t^2 t_1 + \\ + 5(-501+31\sqrt{57})tt_1^2 - 40(-27+\sqrt{57})t_1^3). \tag{25}$$

Диференціюванням виразу (25) за часом отримаємо функцію зміни швидкості механічної системи:

$$\dot{x} = \frac{F_{\max} t^2}{240 m_n t_1^4}(18(-131+9\sqrt{57})t^3 + 45(131-9\sqrt{57})t^2 t_1 + \\ + 10(-501+31\sqrt{57})tt_1^2 - 60(-27+\sqrt{57})t_1^3). \tag{26}$$

У формулах (25) та (26) явно не вказана величина номінальної швидкості, до якої розганяється механізм. Тому знайдемо таке значення часу розгону t_1, після закінчення якого механізм матиме швидкість v. Для цього знайдемо швидкість, яку механізм набуває у кінці розгону за $t = t_1$:

$$\dot{x}(t_1) = \frac{7(21+\sqrt{57})F_{\max}t_1}{240m_n}. \tag{27}$$

Прирівняємо її до v та розв'яжемо отримане рівняння. В результаті чого матимемо:

$$t_1 = \frac{5(21-\sqrt{57})m_n v}{56F_{\max}}. \tag{28}$$

Зобразимо на графіках переміщення, швидкість, прискорення та ривок механізму за таких параметрів: $F_{\max} = 5500\,H$, $v = 2\ м/с$, $m_n = 1000\,кг$ (рис. 2).

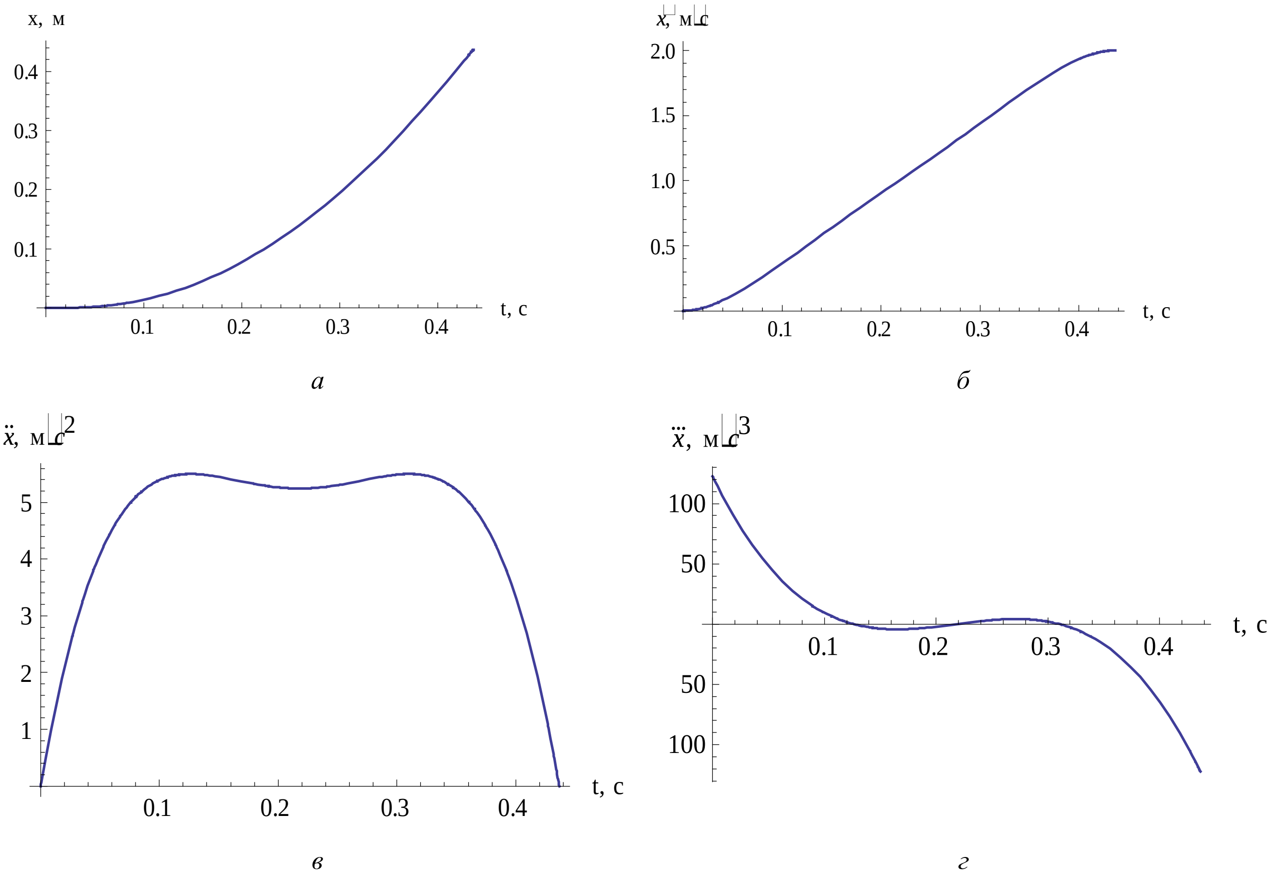


Рис. 2. Графіки функцій переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) та ривка (г) механізму

Аналізуючи отримані графіки, можна побачити, що прискорення змінюється плавно, однак на початку та в кінці руху ривок матеріальної точки приймає абсолютні максимальні значення, що може викликати у процесі пуску системи „м'які" удари та невеликі коливання ланок.

Висновки. У наведеному дослідженні викладено суть прямих варіаційних методів, які використовуються для розв'язання задач оптимального керування. На основі аналізу прямих варіаційних методів виявлено основні їх недоліки і переваги. Наведено суть прямого варіаційного методу та методика мінімізації інтегральних функціоналів, які містять вищі похідні від фазових координат динамічної системи. На основі наведеної методики розв'язано задачу знаходження оптимального програмного керування для режиму розгону одномасової механічної системи. Така система може бути моделлю руху ланки промислового робота, вантажопідіймального крана, залізничного транспорту (у першому наближенні) тощо. Отриманий наближено-оптимальний закон руху механічної системи, який характеризується відсутністю ударних динамічних навантажень та високою плавністю. Це дає змогу збільшити надійність та термін експлуатації механічної системи та уникнути струмових перевантажень її електроприводу. Реалізація режиму руху можлива засобами мехатроніки із використанням керованого приводу.

1. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с. 2. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971. – 744 с. 3. Понтрягин Л.С., Болтнянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальних процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с. 4. Беллман Р. Динамическое программирование / под. ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 400 с. 5. Красовский И.И. Теорія управления движением (линейные системы). – М.: Наука, 1968. – 476 с. 6. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 389 с. 7. Тараненко В.Т., Momoджи В.Г. Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета. – М.: Машиностроение, 1986. – 127 с. 8. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973. – 191 с. 9. Бутов В.Г. Исследование вариационных задач прямими методами // Вычислительная математика и математическая физика. – 2008. – Т. 48, №3. – С. 373–386. 10. Сеньо П.С. Прямые интервальные методы решения вариационных задач и задач оптимального управления // Динамические системы. – 2004. – Вып. 18. – С. 44-50. 11. Страховский Р.И. Изохронно-итеративный метод решения задач оптимального управления // Методы оптимизации автоматических систем: сб. ст.; под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Энергия, 1972. – С. 223–237. 12. Барский И.Л., Румянцев И.А., Флеров Ю.А. Локальная интерполяция в прямых методах вариационного исчисления. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1982. – 56 с. 13. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971. – 424 с. 14. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы). – М.: Наука, 1973. – 107 с. 15. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов / пер. с англ. В.И. Агошкова, В.А. Василенко, В.В. Шайдурова. – М.: Мир, 1977. – 351 с. 16. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978. – 488 с. 17. Miele A., Damoulakis J. N., Cloutier J. R., Tietze J. L. Sequential gradient-restoration algorithm for optimal control problems with nondifferential constraints // JOTA. – 1974. – №2. – P. 13. 18. Хитрик В.Э. Методы динамической оптимизации механизмыв машин-автоматов. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1974. – 116 с. 19. Смехов А. А., Ерофеев Н. И. Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами. – М.: Машиностроение, 1975. – 239 с. 20. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение / под ред. И. Топчеева. – М.: Машиностроение, 1972. – 544 с.