

виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – С. 24–31. 3. Проектирование универсальных шарниров и ведущих валов / А.Х. Беркер, И.Р. Вагнер, Н.В. Вебстер и др. – Л.: Машиностроение, 1984. – 463 с. 4. Зубчатые и червячные передачи. Некоторые вопросы геометрии, кинематики, расчета и производства / под. ред. Н.И. Колчина. – Л.: Машиностроение, 1968. – 363 с. 5. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин. – К.: Наук. думка, 2002. – 660 с.

УДК 621.9(075.8)

**В.В. Ступницький**

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра технології машинобудування

## **МЕХАНІКА ДИСЛОКАЦІЙ ПІД ЧАС РІЗАННЯ ТА ЇЇ МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДАМИ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

© Ступницький В.В., 2012

**Проаналізовано основні положення теорії дислокацій з точки зору використання у реологічних моделях різання. Наведено результати імітаційного моделювання критерію Бюргерса. Наведено математичну модель, яка описує поведінку термопружнопластичної заготовки у процесі її нарізання.**

**In the article the analysed bases of theory of distributions are from the point of view of the use in the reological models of cutting. Given results over of imitation design of Burgers criterion. Described mathematical model over that describes behavior of the thermal and tense state of plastic purveyance in the cutting process.**

**Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень.** Теорія пластичної деформації знаходиться у менш задовільному становищі, ніж теорія пружності або термодинаміка, через свою нелінійність, складність описання динамічних процесів, що відбуваються у складно деформованому середовищі під дією локального руйнівного напруження, впливу великої кількості чинників на отримання адекватного результату моделювання. Пластична деформація, що передує руйнуванню, визначається рухом дислокацій у кристалі. Сучасній науці досі не вдалося знайти однозначне аналітичне розв'язання рівнянь квантової механіки, що визначали б розташування атомів біля дислокації, і для сил, необхідних для деформаційних дислокацій. Найефективнішим методом аналітичних досліджень є розповсюдження механіки суцільних середовищ на області майже атомних розмірів і її корегування шляхом введення відповідної нелінійної поправки для області найвищих деформацій у ядрі дислокації замість квантово-механічного аналізу [1]. Проте отримання квантово-механічного рішення навіть для одиначної дислокації не так вже й складно, оскільки велика частина енергії дислокації зосереджена не в ядрі цієї недосконалості, а в пружно-деформованій області, розміри якої дають змогу з впевненістю використати континуальну теорію пружності [2, 4].

У зв'язку з цим, використавши незначні припущення, вдалося розвинути теорію дислокацій у процесах різання, яка пояснює їх рух, взаємодію і розвиток під дією прикладеної ззовні силової взаємодії інструмента та заготовки. Отримані рішення допомагають з'ясувати природу процесів деформації і руйнування матеріалів. Завдяки вдосконаленню металографічних методик і використанню електронної мікроскопії стало можливим спостереження окремих дислокацій, і тепер відомостей, отриманих експериментально, набагато більше, ніж тих, що отримані внаслідок теоретичних досліджень. На макроскопічному рівні механіка різання використовує рівняння, що пов'язують напруження і деформацію (ці рівняння або отримані емпірично, або впливають з даних про структуру матеріалу [1]), і, враховуючи умови рівноваги і геометричної спільності, передбачає поведінку областей матеріалу, розміри яких настільки великі, що можна вважати їх однорідними.

Макроскопічно механічну поведінку матеріалів під час різання зручно описувати за допомогою деформації, яку створюють напруження, температура і час. Відомі різні схеми такої поведінки, що ідеалізуються: пружність, пластичність, повзучість, релаксація і пружна післядія. На механічні властивості матеріалів значний вплив має їх структура деталі, тому необхідно знати будову матеріалів майже на усіх рівнях, починаючи з атомної структури і макроструктури.

Електронна структура атомів визначає зв'язок між ними у твердому тілі. Міжатомні зв'язки у твердих тілах в технічній літературі [4, 6] прийнято поділяти на два типи: первинні і вторинні. Тверде тіло має набір мод теплових коливань. Найвища частота, що відповідає зустрічному коливному руху сусідніх атомів, приблизно дорівнює [1]:

$$v = \sqrt{\frac{E \cdot b}{M/N_a}}, \quad (1)$$

де  $E$  — модуль пружності;  $N_a$  — число Авогадро;  $M$  — атомна вага.

Якщо температура висока і квантово-механічні ефекти значної ролі не відіграють, то тепловий рух атомів у ґратках можна у першому наближенні описати за допомогою класичної статистики Больцмана [1, 4]. У твердому тілі кожен атом має три координати, що визначають положення його центра, і три координати, що визначають його обертання. На кожен координату доводиться енергія  $kT/2$ , тоді повна енергія дорівнює  $3kT$ , а теплоємність —  $3N_a k$ . Імовірність флуктуацій з енергією більше  $u$ , визначається розподілом Максвелла–Больцмана:

$$p(u_i \geq u) = e^{-u/kT}. \quad (2)$$

Швидкість  $V$  процесу, що термічно активується з єдиним енергетичним бар'єром  $u_a$  (енергією активації), визначається за формулою

$$V = N_s \cdot v_a \cdot e^{-u/kT}, \quad (3)$$

де  $N_s$  — кількість можливих центрів активації;  $v_a$  — характеристична частота коливань.

Кристаліграфічні площини і напрями у кристалічних ґратках зручно позначати трьома індексами за Міллером. Індеси у кубічній структурі відповідають зворотним величинам направляючих косинусів, тому до них застосовані методи векторної алгебри.

МакКлінток та Аргон довели [1], що результатом руху дислокацій є відносне зміщення двох частин кристала по різні боки від площини руху дислокації, що дорівнює довжині вектора трансляції. Тоді дію прикладеної зовнішньої сили різання на дислокацію можна вважати еквівалентною появі розподіленої сили, завжди спрямованої перпендикулярно до дислокаційної лінії. Значна величина пружної енергії, яку має дислокація, призводить до того, що поведінка дислокації подібна до поведінки гумової стрічки, що увесь час витримує дію лінійного натягу. З вивчення динаміки дислокації, випливає, що дислокація поводить себе як лінія, одиниця довжини якої має певну масу. Отже, за своїми властивостями дислокаційна лінія є одновимірним аналогом розтягнутої гумової мембрани.

**Формулювання мети досліджень.** Метою досліджень є аналіз використання теорії дислокацій в імітаційних реологічних моделях різання, що реалізуються за допомогою САЕ систем з використанням методу скінченних елементів (МКЕ).

**Виклад основного матеріалу.** Для проходження дислокації через потенційні бар'єри ґраток до неї треба прикласти напруження граничної величини, але встановлена експериментально межа плинності  $S_m$  визначається, як правило, іншими міркуваннями. Рух часткових дислокацій призводить до утворення плоского порушення правильного упакування ґраток, перетин цих неповних дислокацій і реакції їх взаємодії.

Якщо зсувна дислокація проходить відстань  $x$  по площині зсуву у кристалі завдовжки  $l$ , завтовшки  $h$  і завширшки  $t$ , виникає пластична деформація зрушення:

$$\gamma = \frac{xt}{tl} \cdot \frac{b}{h}. \quad (4)$$

Якщо в оброблюваній деталі є  $N$  дислокацій, паралельних до напрямку подачі  $S$ , і усі вони проходять у середньому відстань  $\lambda$ , то повна деформація, очевидно, дорівнюватиме:

$$\gamma = \frac{\lambda b}{lh} \cdot N. \quad (5)$$

Якщо врахувати, що густина дислокацій  $\Lambda = N/lh$ , то рівняння (6) можна записати у простому вигляді:

$$\gamma = \Lambda \cdot \lambda \cdot b. \quad (6)$$

У деталях, виготовлених з конструкційних сталей, після термооброблення густина дислокацій  $\Lambda$  становить величину порядку  $10^4 \dots 10^6 \text{ см}^{-2}$ , а в сильно деформованих кристалах після чорнового оброблення лезовим інструментом (фрезеруванням або точінням) вона може досягати  $10^{10} \dots 10^{12} \text{ см}^{-2}$  [2].

Дислокація створює у кристалічній структурі деталі самоврівноважувальне поле напружень. Це визначається самою природою дислокації. Якщо знехтувати анізотропією кристала і вважати середовище лінійно-пружним, можна визначити поля напруження крайовою і гвинтовою дислокацією шляхом суперпозиції цих полів і будь-якої дислокації змішаного типу.

Для пояснення природи руху дислокацій під час процесу різання розглянемо тензор механічних напружень. Якщо окіл точки обмежити шістьма взаємно перпендикулярними площинами і отриманий елементарний паралелепіпед зорієнтувати ребрами паралельно до осей декартових координат, то на кожній із граней паралелепіпеда діятимуть відповідні напруження. Повні напруження у площинах  $xu$ ,  $xz$  та  $uz$  можна розкласти по напрямках, паралельних до осей декартових координат. Отримані дев'ять компонентів напружень повністю визначають напружений стан і утворюють *тензор механічних напружень* (тензор напружень Коші):

$$\sigma = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} T^{(e_1)} \\ T^{(e_2)} \\ T^{(e_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (7)$$

де  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  – це нормальні напруження, а  $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$  – дотичні напруження.

Загалом напружений стан характеризується тензором механічних напружень, а стан, відмінний від одновісного розтягування–стискання, – складним напруженим станом.

Векторною характеристикою дислокації є вектор Бюргерса ( $\vec{b}$ ) [5]. Для його визначення потрібно порівняти між собою кристалічну ґратку заготовки без дислокації і з нею. Якщо уявити собі замкнений контур (контур Бюргерса) в ідеальній ґратці, то присутність дислокації розімкне його. Вектором Бюргерса називається вектор, який з'єднає точки розриву. Причому знак вектора Бюргерса визначається за правилом правого гвинта. Спочатку вибирають довільний напрям вздовж лінії дислокації. Потім контур Бюргерса будують за правилом правого гвинта стосовно вибраного напрямку. Вектор Бюргерса направлений від кінцевої точки обходу до початкової [1].

Математично це записується так:

$$\oint_L du = -b, \quad (8)$$

де  $L$  – контур Бюргерса;  $u$  – вектор зміщення.

Для крайової дислокації вектор Бюргерса перпендикулярний до лінії дислокації. Для гвинтової дислокації вектор Бюргерса паралельний до лінії дислокації. Величина й напрямок вектора Бюргерса визначають поля напружень навколо дислокації. На рис. 1 зображено побудову контуру Бюргерса ( $ABCD$ ) навколо крайової дислокації. Початкова точка –  $A$ . Відомо, що крайовою дислокацією є область недосконалого кристала навколо краю «зайвої» екстраплощини [1,5]. Якщо далі будувати такий самий контур у досконалій області кристала без дислокацій, вибравши за вихідну точку обходу  $A'$ , то в результаті опинимось в точці  $E$ , а не у вихідній точці  $A'$  і контур

вийде незамкненим. Причому вектор  $\vec{b}$ , проведений з т.  $E$  в т.  $A'$ , і є вектором Бюргерса, що характеризує ступінь спотворення ґратки у деформованому кристалі. Отже, вектор Бюргерса є головною кількісною характеристикою дислокації.

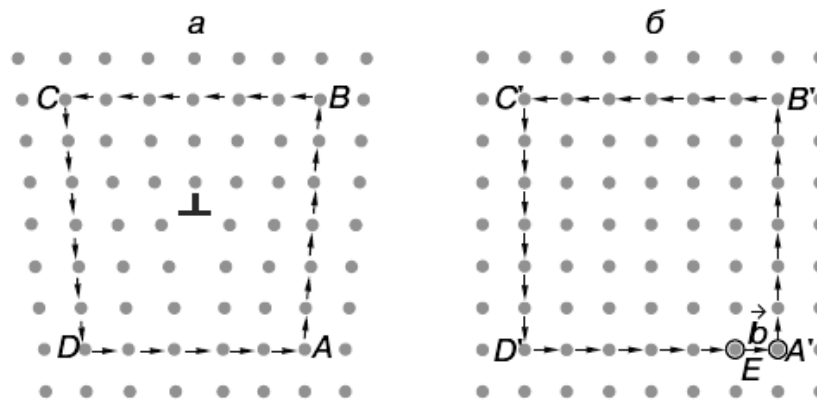


Рис. 1. Контур Бюргерса навколо крайової дислокації (а) і еквівалентний контур у досконалomu кристалі (б):  $\vec{b}$  – вектор Бюргерса;  $\perp$  – дислокація (край зайвої площини в кристалі)

Дислокації, що мають вздовж цього напрямку однаковий напрямок з вектором Бюргерса  $\vec{b}$  ( $r_+$ ), вважають позитивними і називають надлишковою густиною дислокацій. Дислокації, протилежні до напрямку вектора Бюргерса, є негативними ( $r_-$ ). Причому різноспрямовані дислокації можуть поглинати один одного – дисоціювати, а односпрямовані дислокації – додаватись – асоціювати. Отже, важливою характеристикою дислокаційної структури є різниця між  $r_+$  і  $r_-$ :

$$\rho_{\pm} = \rho_+ - \rho_- \quad (9)$$

Ця величина характеризує пластичний згин кристалічної ґратки, що може бути визначена за його градієнтом ( $dj/dl$ ), – кут повороту на одиницю довжини:

$$\rho_+ = \frac{1}{b} \cdot \frac{d\phi}{dl} \quad (10)$$

У цьому випадку надлишкова густина дислокацій безпосередньо пов'язана з радіусом кривизни ґратки  $C$ , що була створена внаслідок нерівномірної силової дії різального клина на заготовку у зоні стружкоутворення (насамперед в зоні кореня стружки):

$$\chi = \frac{1}{b\rho_{\pm}} \quad (11)$$

Очевидно, що загалом густина дислокацій є тензорною величиною.

Для описання руху суцільного середовища методом чисельного моделювання використовують різні конфігурації розрахункових сіток. Під час побудови цих сіток керуються насамперед особливостями цього стану об'єкта моделювання і необхідністю досягнення прийнятної точності під час використання певного методу рішення систем рівнянь, що описують стан суцільних середовищ. Істотне значення під час вибору конфігурацій сіток відіграють кваліфікація і професійне «відчуття» обчислювача. Побудовані на початку розрахунку т зв. ейлерові сіткові лінії, як правило, залишаються незмінними впродовж усього процесу розрахунку. Такий підхід добре зарекомендував себе під час реологічного моделювання статичних середовищ, в яких чітко зафіксовані або взагалі відсутні межі розподілу силової дії об'єктів моделювання. Але, моделюючи процеси різання, ми маємо справу з динамікою дислокаційних зон, де вищеписаний підхід є повністю неприйнятний, оскільки сіткові лінії не можуть бути фіксованими, а повинні адаптуватись під положення меж, що змінюються у часі в результаті утворення стружки, деформацій інструмента та заготовки тощо. У зв'язку з цим видається доцільним використання методів розрахунку динаміки суцільного середовища за допомогою так званої адаптивної лагранжевої сітки.

З метою аналізу напрямку та чисельного значення руху дислокацій під час різання в програмі Deform 2D був змодельований цей процес, де використана схема МКЕ і рухома лагранжева сітка (рис. 2). Як бачимо, на рис. 2 в зоні значних силових деформацій відбувається руйнування замкненого контуру лагранжевої сітки, що і дає можливість змоделювати напрям та числове значення вектора Бюргерса в зоні різання (рис. 2).

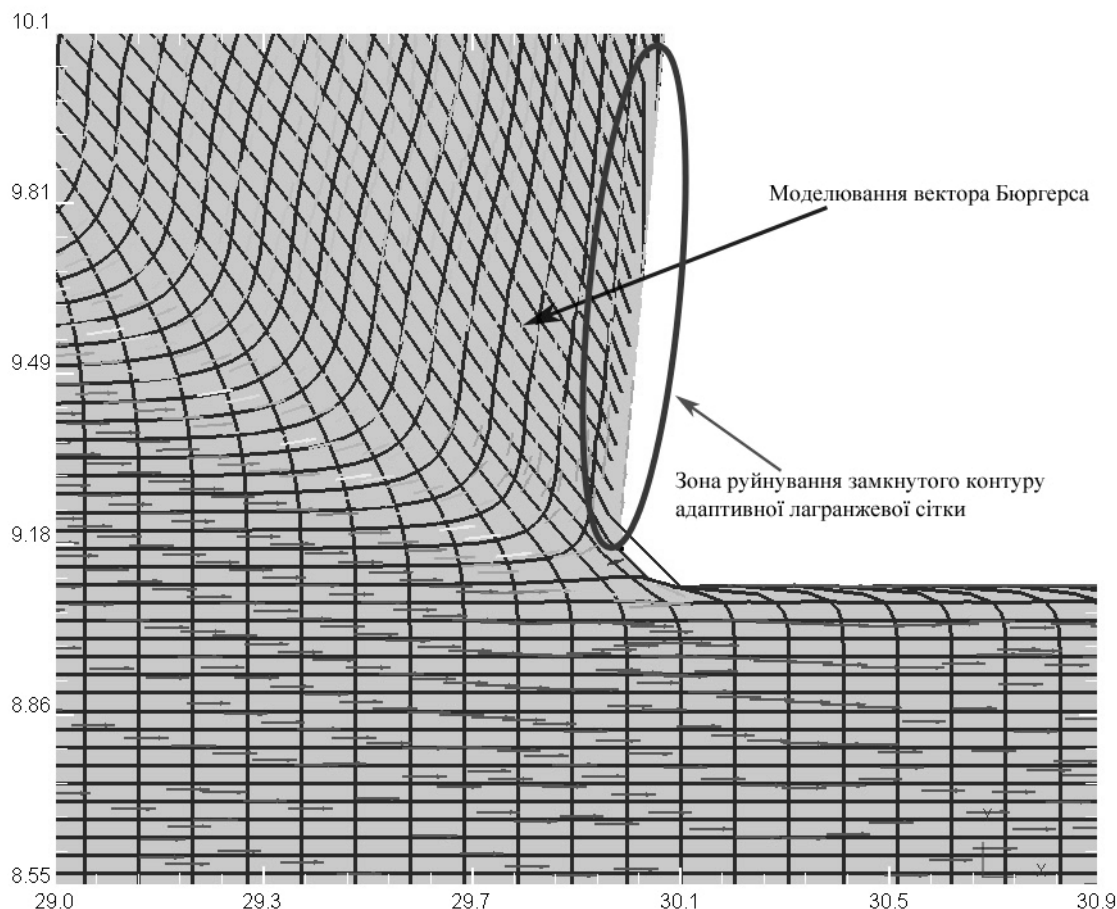


Рис. 2. Моделювання адаптивної лагранжевої сітки та динаміки дислокацій у процесі різання

Важливим етапом моделювання процесу різання є адекватне встановлення характеру руйнування – крихке або пластичне. Межа між різними видами руйнування розмита і не є чітко окресленою. Досі немає загальноприйнятого визначення крихкого руйнування. Ось деякі з них:

1. Руйнування вважається крихким, якщо для його перебігу і завершення достатньо пружної енергії зруйнованої заготовки.
2. Крихким є руйнування, за якого нестабільне зростання тріщини у зоні силової дії різального клина відбувається за напруження, меншого від межі плинності  $[\sigma_T]$ .
3. Крихким є руйнування без помітних пластичних деформацій  $\epsilon$ .
4. Якісна відмінність між випадками крихкого і пластичного руйнування заготовки пов'язана із швидкістю поширення тріщини. За крихкого руйнування ця швидкість дуже велика – досягає 40...50 % від швидкості поширення звука в матеріалі зразка. У разі ж в'язкого руйнування тріщина поширюється з порівняно малою швидкістю, приблизно такою, що дорівнює швидкості деформації матеріалу у зоні стружкоутворення –  $\dot{\epsilon}$ .

Моделювання процесів руйнування ґрунтуються на уявленні про руйнування як про втрату здатності матеріалу до опору деформації внаслідок порушення внутрішніх зв'язків з ростом концентрації мікротріщин. Слід також зауважити, що ідеальних умов руйнування не існує в природі [6]. Будь-який матеріал можна лише з певним припущенням зарахувати до крихких або пластичних матеріалів, для яких характерні відповідні умови оброблення, та математичний апарат, що їх описує

або імітує. В інженерній практиці прийнято, що міцність ідеально крихкого матеріалу на стискування у вісім разів перевищує його міцність на розтягування [7]. Причому для крихких матеріалів вважається, що руйнування відбувається миттєво за умови досягнення критерію руйнування. Такі моделі розглядаються у межах механіки крихкого руйнування явним виділенням поверхонь руйнування як контактних розривів магістрального типу. Математичне описання процесів крихкого руйнування стикається зі значними складнощами під час описання зародження та розвитку тріщин, особливостей їх мультиплікації. Тому у механіці деформованих середовищ для розрахунку випадків різання крихких матеріалів використовують континуальний опис руйнування. Такий підхід передбачає описання руйнування як процесу на основі визначальних рівнянь, записаних в єдиній формі для зруйнованого і незруйнованого стану матеріалу заготовки. Континуальний підхід описує появу і розвиток поверхонь і зон руйнування без явного їх виділення, що відповідає методам наскрізного розрахунку, описаного в роботах Майнчена і Сака [2, 7], і реалізується теорією скінченних елементів.

При обробці крихких матеріалів кінетика руйнування не враховується, тобто за досягнення критерію руйнування напружено-деформований стан заготовки і інструмента у малому об'ємі комірки рухомої лагранжевої розрахункової сітки проходить стрибкоподібно. З іншого боку, спадання напружень у заготовці внаслідок втрати матеріалом здатності до опору деформації здійснюється за умови незмінної деформації [1]. Це свідчить про те, що за континуального опису, процеси деформації металорізального інструменту та руйнування заготовки слід трактувати як незалежні (що не виключає взаємовпливу), а розвиток руйнування слід характеризувати не деформацією (англ. *displacement*), а власним критерієм деформації (англ. *damage*), що залежить насамперед від швидкості деформації (англ. *stress rate*) (рис. 4).

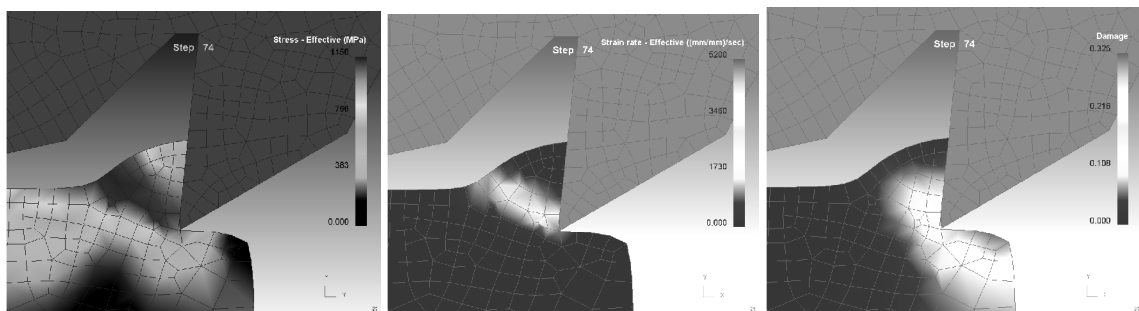


Рис. 3. Приклад імітаційного моделювання та розрахунку показників еквівалентного напруження, швидкості зміни швидкості деформації та критерійного показника руйнування під час фрезерування заготовки (матеріал – сталь 35,  $S = 60$  мм/хв;  $n = 100$  хв<sup>-1</sup>;  $V = 88$  м/хв)

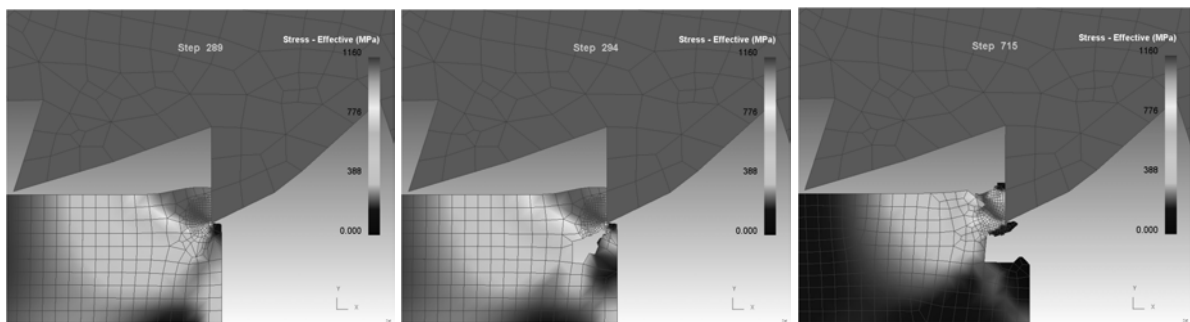


Рис. 4. Приклад крихкого руйнування заготовки під час фрезерування в динаміці (матеріал – чавун СЧ30,  $S = 60$  мм/хв;  $n = 100$  хв<sup>-1</sup>;  $V = 88$  м/хв)

Крихке руйнування супроводжується мінімальним поглинанням енергії і за швидкостей руйнування, близьких до швидкості звука у тому самому середовищі і є наслідком присутності в матеріалі субмікроскопічних тріщин з атомарно гострими кінцями, де концентрація напруження перевищує здатність тіла чинити опір цьому напруженню [2, 3]. Умова такого руйнування, за

Гріффітсом [1], полягає у тому, що нескінченно гостра еліптична тріщина з головною піввіссю  $c$ , нормальною до напрямку одновісного напруження розтягу  $\sigma_0$ , що знаходиться в деталі з модулем пружності  $E$ , може досягти точки своєї нестабільності. У цій точці збільшення поверхневої енергії, необхідної для зростання тріщини, може бути отримане за рахунок енергії пружної деформації тих частин напруженої деталі, через які поширюється руйнування. Номінальне напруження в точці руйнування дорівнює

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2\alpha E}{\pi c}}, \quad (12)$$

де  $\alpha$  – питома поверхнева енергія заготовки. Номінальне напруження  $\sigma_0$  для руйнування різанням може бути отримане, враховуючи концентрацію напруження навколо еліптичної тріщини завдовжки  $2c$  з атомарно гострим радіусом кривизни  $a$ , якщо прийняти, що концентрація напруження у вершині тріщини досягла ідеальної міцності  $\sigma_c = 2\pi\alpha/a = E/2\rho$  за номінального напруження  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 \approx \frac{\sigma_c}{2} \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (13)$$

На відміну від крихкого руйнування за пластичного руйнування до відокремлення стружки від заготовки повинна виникнути велика залишкова деформація. Граничний випадок розділення далі на окремі частини в результаті в'язкої або пластичної деформації, що триває до того часу, поки площа поперечного перерізу не зменшиться до нуля, є розривом. Якщо стається помітна пластична деформація, але утворюється поверхня зламу і величина деформації менша, ніж за розриву, процес називають пластичним руйнуванням.

Оскільки руйнування починається за певної комбінації напруження і деформацій, аналіз випадків, що ґрунтується на розгляді структури та руху дислокацій, призводить до руйнування, критерій настання якого значно більше залежить від передісторії напруження і деформацій, ніж від умови пластичності. Він вказує також на сильну залежність руйнування від анізотропії включень, біля яких відбувається зростання концентраторів напружень, і від відношення розміру цього концентратора до відстані між включеннями. За дуже великих концентрацій деформацій, що виникають за наявності тріщин, пластичне руйнування може статися за номінальної напруги нижче від межі текучості [ $S_T$ ]. Тоді, навіть якщо матеріал і пластичний, конструкція руйнується крихко, у тому сенсі, що загальна величина пластичної деформації до руйнування мала.

Основною характеристикою матеріалу за механічного оброблення є модуль зсуву  $G$ , що характеризується відношенням дотичного напруження  $t_{xy}$  до зсувної деформації  $g_{xy}$ :

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{F/A}{\Delta x/t} = \frac{Ft}{A\Delta x}, \quad (14)$$

де  $t_{xy}=F/A$  – дотичне напруження зсуву під час різання;  $F$  – складова сили різання, направленої у напрямку зсувного вектора;  $A$  – площа, на якій діє сила  $F$ ;  $g_{xy}=\Delta x/t$  – деформація зсуву;  $t$  – глибина різання.

Для конструкційної сталі модуль зсуву за кімнатної температури дорівнює  $G=79,3$  ГПа [1].

Крихке руйнування і розрив є граничними формами руйнування. Між ними лежить пластичне руйнування, що визначається як розділення тіла у присутності деякої пластичної деформації, але за наявності ясно вираженої поверхні руйнування і за меншої деформації, ніж у разі розриву. Інколи, пластична деформація обмежується деформацією по межах зерен, яка потрібна для злиття крихких тріщин сколювання в окремих зернах [1].

Розглянемо реологічну модель квазікрихкого різання пружнопластичних матеріалів. При цьому робиться спроба подолання вищенаведених недоліків під час розв'язання задачі руйнування, що дає змогу прослідкувати за розвитком магістральних тріщин у вигляді полос квазікрихкого руйнування, що спричиняють стрибки швидкості руйнування та спалахи деформацій. Модель справедлива для випадків граничних пластичних деформацій і враховує ту обставину, що руйнування супроводжується зміною режиму деформування від квазістатичного за відсутності руйнування до суто динамічного під час розвитку вузьких зон локалізації деформацій.

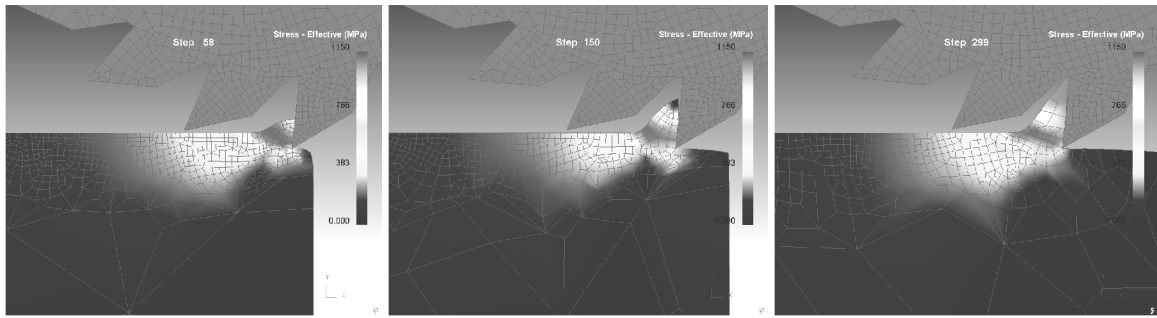


Рис. 5. Приклад пластичного руйнування заготовки під час фрезерування в динаміці (матеріал – сталь 35,  $S = 60$  мм/хв;  $n = 100$  хв<sup>-1</sup>;  $V = 88$  м/хв)

У стані механічної рівноваги прикладена зовні сила діє лише на поверхню заготовки. Всередині цієї заготовки та інструмента справедливе твердження, що кожен об'єм діє на сусідній з такою самою силою, що й сусідній діє на нього самого (третій закон Ньютона). У такому випадку справедливе рівняння рівноваги, що визначає деформацію тіла:

$$F_i = \sum_k \frac{d\sigma_{ik}}{dx_k} = 0. \quad (15)$$

Оскільки на тіло (у цьому випадку – заготовку) діють так звані деконцентровані (площинні або об'ємні) сили різання, рівняння рівноваги набирає такого вигляду:

$$\sum_k \frac{d\sigma_{ik}}{dx_k} = \rho E, \quad (16)$$

де  $\rho$  – густина заготовки;  $\mathfrak{E}$  – ейлерів тензор швидкості деформації (*damage rate*) – дія сил різання у розрахунку на одиницю об'єму.

Система рівнянь, що описує поведінку термопружнопластичної заготовки у процесі її різання, розроблена на основі класичного термодинамічного аналізу [8]. Система рівнянь відображає закони збереження енергії, маси та імпульсу, а також кінематичні відношення:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \mathfrak{E} : I = 0, \quad \rho \frac{dS}{dt} + \nabla \cdot \sigma = 0, \quad \rho \frac{dS}{dt} = \sigma : \mathfrak{E} + \nabla q + \rho r = 0, \\ F^{-1} = \nabla x^o, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (I - F^{-T} \cdot F^{-1}), \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{2} (L + L^T), \\ E = \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \cdot L + L^T \cdot \varepsilon, \quad L = \nabla S, \quad \frac{dx}{dt} = S. \end{aligned} \quad (17)$$

де  $S$  – подача інструмента;  $x$  – поточне положення інструмента (ейлерів радіус-вектор);  $x^o$  – початкове положення інструмента (лагранжів радіус-вектор);  $F$  – градієнт деформації (*damage*);  $L$  – градієнт швидкості різання;  $\varepsilon$  – тензор деформації [1];  $\sigma$  – тензор напруження Коші;  $U$  – внутрішня енергія одиниці об'єму заготовки;  $q$  – вектор теплового потоку.

Тензор деформації – математичний об'єкт, який характеризує зміщення кожної точки тіла під час деформації.

Тензор деформації визначається як [8]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{dh_i}{dx_j} + \frac{dh_j}{dx_i} \right) \quad (18)$$

де  $h$  – вектор, який описує зміщення точки тіла.

У випадку розгляду ортогональної моделі різання тензор деформації симетричний, тобто  $e = e_{ij} = e_{ji}$ . Як і для тензора напруження, діагональні елементи тензора деформації описують лінійні деформації розтягу чи стиску, недиагональні – деформацію зсуву.

Складова швидкості дисипації, що характеризує пластичні деформації заготовки, є однорідною функцією першого порядку від швидкості цієї пластичної деформації, що відповідає випадку пружнопластичного середовища, незалежного від зміни масштабу часу перебігу процесу різання. Очевидно, що пластичне деформування збільшується за умови активного навантаження.



Опір середовища, що характеризується модулями пружності (для різання – модулем зсуву  $G$  і межею плинності  $\sigma_T$ ), крім температури, залежить також від додаткового параметра стану, що характеризується критерієм руйнування  $D$ . Кінетика процесу руйнування визначається залежністю швидкості дисипації від швидкості зміни критерію руйнування.

**Висновки.** Аналіз результатів реологічного моделювання процесів різання дає змогу зробити такі висновки:

- врахування основних положень теорії дислокацій дає змогу пояснити результати імітаційного моделювання процесів різання, перевірити їх на адекватність з теоретичного погляду;
- найефективнішим механізмом аналізу напрямку та інтенсивності дислокацій є вектор Бюрджера, що моделюється за допомогою МКЕ динамікою трансформації лагранжевої сітки;
- реологічна модель різання розроблена на основі класичного термодинамічного аналізу, що відображає закони збереження енергії, маси та імпульсу.

1. МакКлінток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. – М.: Мир, 1970. – 501 с.  
2. Богатов А.А. Механические свойства и модели разрушения металлов. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2002. – 329 с. 3. Розенберг А.М., Розенберг О.А. Механика пластического деформирования в процессах резания и деформирующего протягивания / под ред. П.Р. Родина; АН УССР. Ин-т сверхтвердых материалов. – К.: Наук. думка, 1990. – 320 с. 4. Дель Г.Д. Технологическая механика. – М.: Машиностроение, 1978. – 174 с. 5. Конева Н.А. Природа стадий пластической деформации // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №6. – С.99–105. 6. Хеллан К. Введение в механику разрушения. – М.: Мир, 1988. – 346 с. 7. Матвиенко Ю. Г. Модели и критерии механики разрушения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 328 с. 8. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. – М.: МФТИ, 2008. – 215 с.

УДК 621.9

**Н.В. Ступницька**

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра охорони праці

## **ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛАНУ ЗАХОДІВ З ОХОРОНИ ПРАЦІ НА МАШИНОБУДІВНОМУ ВИРОБНИЦТВІ**

© Ступницька Н.В., 2012

**Наведено класифікацію заходів з охорони праці на машинобудівному виробництві. Розроблено математичну оптимізаційну модель планування заходів запобігання виробничого травматизму.**

**In the article the brought classification over of measures on a labour protection on a machine-building production. The mathematical optimization model planning of measures as prevention of productive traumatism is worked out.**

**Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень.** Існуючі методики побудови математичних моделей та пошук універсальних критеріїв оцінки травмонебезпечних ситуацій на машинобудівних підприємствах передбачають здебільшого дослідження характеру статистичних потоків травматизму. Аналіз літературних джерел з питання оцінки виробничих систем щодо їх травмонебезпеки дає змогу виділити два основні напрямки таких досліджень. Перший з них [2, 4] (умовно його можна назвати методом синтезу) ґрунтується на статистичному аналізі мікро-травматизму, що дає можливість узагальнити визначені в такий спосіб показники та будувати за-