

**ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ *BETA*- ТА *ATEB*-ФУНКЦІЙ**

© Назаркевич М., 2012

Розглянуто застосування *Beta*- та *Ateb*-функцій для математичного аналізу, математичної статистики, рівнянь математичної фізики, механіки, квантової фізики та інформаційних технологій. Наведено властивості та побудовано графіки цих функцій. Досліджено взаємодію *Beta*- та *Ateb*-функцій.

**Ключові слова:** *Beta*-функції, *Ateb*-функції, моделювання коливних процесів, теорія струн, поліграфічний захист.

**Application *Beta* and *Ateb*-functions for mathematical analysis, mathematical statistics, mathematical physics, mechanics, quantum physics and information technology is considered. There are presented properties and constructed graphs of these functions. The interaction of *Beta* and *Ateb*-functions is investigated.**

**Key words:** *Beta*-function, *Ateb*-functions, modeling oscillatory processes, string theory, printing security

**1. Вступ**

Незважаючи на майже трьохсотлітнє існування введених Ейлером *Beta*- та *Гама*-функцій, вони залишаються потужним інструментом дослідження у багатьох галузях науки та техніки. Цей інструментарій розвивається та вдосконалюється. Великий інтерес до дослідження *Beta*-функції спричинили відкриття у 60-х роках минулого століття у квантовій фізиці, а саме виникнення теорії суперструн. *Beta*- та *Гама*-функції застосовуються у механіці, теорії ймовірностей та математичній статистиці. У 50-х роках минулого століття Розенберг вперше ввів функцію, обернену до *Beta*-функції, так звану *Ateb*-функцію [1]. *Ateb*-функції отримали широке застосування у механіці при взаємодії стержнів, зокрема у роботах [2]. Також новою сферою застосування *Ateb*-функцій є поліграфічний захист інформації, що розвинутий у працях [3–4]. У статті розглянуто сучасні відомі галузі застосування *Beta*- та *Ateb*-функцій, досліджено їх властивості та взаємодію.

**2. Спеціальні функції**

*Beta*-функцією називається функція від двох змінних [5]:

$$B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{n}{n+1}} (1-t)^{-\frac{m}{m+1}} dt \quad (1)$$

визначена при

$$\frac{1}{n+1} > 0, \quad \frac{1}{m+1} > 0 \quad (2)$$

$n, m$  – дійсні числа. Графічне зображення *Beta*-функції від дійсних аргументів при зміні обох аргументів в межах від 0 до 100 показане на рис. 1. Тут і нижче обчислення реалізовані у пакеті Mathematica 6.

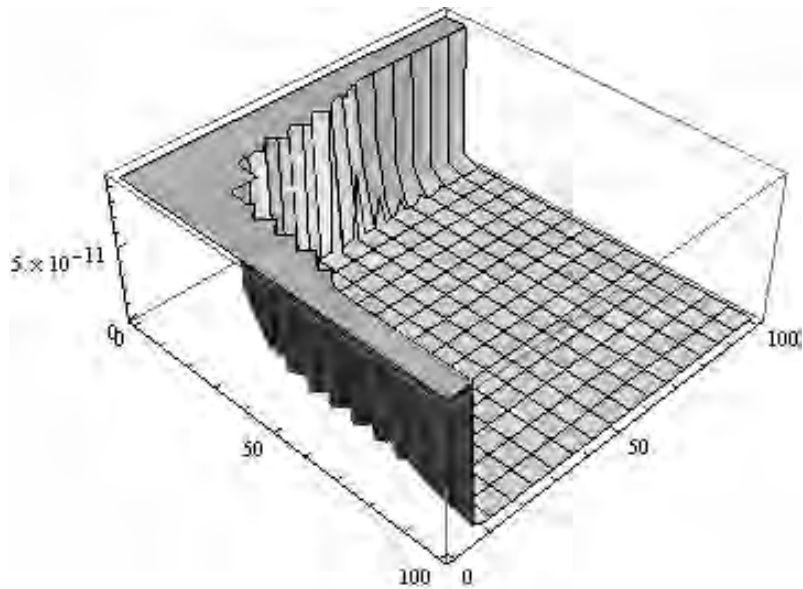


Рис. 1. Графік Beta-функції від дійсних додатних аргументів

### 1.1. Властивості Beta-функції

Beta-функція є симетрична. Це відповідає властивості

$$B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right) = B\left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{n+1}\right) \quad (3)$$

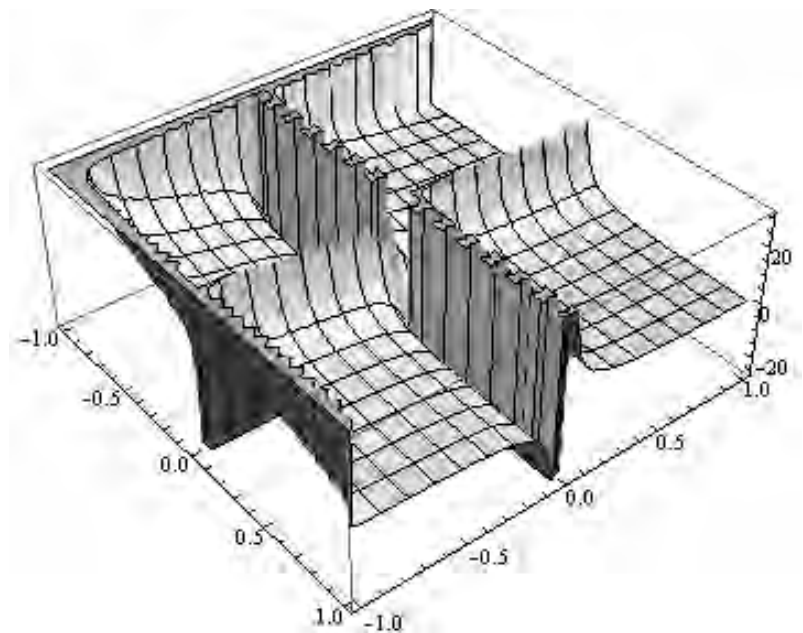


Рис. 2. Графік Beta-функції від дійсних аргументів

Графік Beta-функції від дійсних аргументів при зміні обох аргументів в межах від -1 до 1, показаний на рис.2. На рис.2 видно, що у площинах  $x=0$  та  $y=0$  функція має асимптоти.

Beta-функція  $B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right)$  має формулу вираження через  $B\left(\frac{1}{n+1}-1, \frac{1}{m+1}\right)$  у вигляді [5]

$$B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right) = \frac{n(m+1)}{nm-1} B\left(\frac{-n}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right) \quad (4)$$

*Beta*-функцію можна виразити через *Гама*-функцію за допомогою залежності [5]:

$$B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right) = \frac{\tilde{A}\left(\frac{1}{n+1}\right)\tilde{A}\left(\frac{1}{m+1}\right)}{\tilde{A}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1}\right)} \quad (5)$$

Під час виконання умови (2) *Beta*-функцію можна виразити через інші функції такими залежностями [5]:

$$B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{1-n}{n+1}} t \cdot \cos^{\frac{1-m}{m+1}} t \, dt, \quad (6)$$

$$B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{-n}{n+1}}}{(1+t)^{\frac{m+n+2}{(n+1)(m+1)}}} \, dt, \quad (7)$$

Розглянемо залежність *Beta*-функції від комплексних аргументів. Графік *Beta*-функції від комплексних аргументів  $x+iy$  на площині  $[-5;2] \times [-1;1]$  наведений на рис.3. На рис.3 видно, що у точках  $A_i = \{(-a;0), a > 0\}$   $\lim_{(x,y) \rightarrow A_i} B(x,y) \rightarrow +\infty$ .

*Beta*-функція виражається через узагальнення факторіалу, так званий нижній факторіал, за формулою

$$B(x,y) = \frac{1}{y} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(y)_{k+1}}{k!(x+k)}, \quad (8)$$

де  $(x)_k$  — нижній факторіал, що дорівнює  $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-k+1)$ .

*Beta*-функція використовується для записування узагальнених біноміальних коефіцієнтів з дійсними параметрами [5]:

$$C_p^k = \frac{1}{(p+1)B(p-k+1, k+1)}. \quad (9)$$

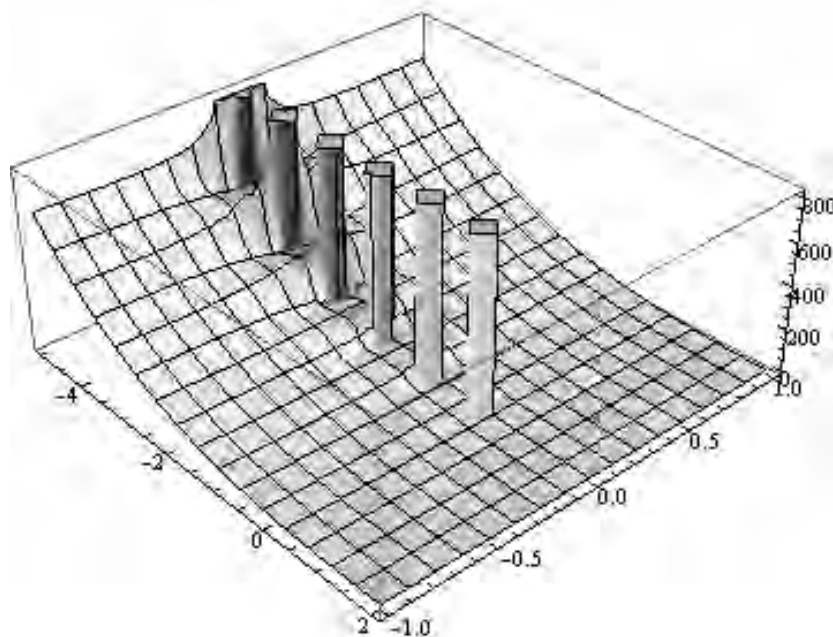


Рис. 3. Графік *Beta*-функції від комплексних аргументів

Часткові похідні *Beta*-функції обчислюють за формулами:

$$\frac{\partial}{\partial x} B(x, y) = B(x, y) \left( \frac{\tilde{A}'(x)}{\tilde{A}(x)} - \frac{\tilde{A}'(x+y)}{\tilde{A}(x+y)} \right) = B(x, y) \left( \frac{d}{dx} \ln \tilde{A}(x) - \frac{d}{d(x+y)} \ln \tilde{A}(x+y) \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} B(x, y) = B(x, y) \left( \frac{\tilde{A}'(y)}{\tilde{A}(y)} - \frac{\tilde{A}'(x+y)}{\tilde{A}(x+y)} \right) = B(x, y) \left( \frac{d}{dy} \ln \tilde{A}(y) - \frac{d}{d(x+y)} \ln \tilde{A}(x+y) \right) \quad (11)$$

Як видно з наведених властивостей, *Beta*-функція тісно пов'язана з фундаментальними математичними поняттями і використовується у рівняннях математичної фізики, математичній статистиці, функціональному аналізі.

## 1.2. Властивості неповної *Beta*-функції

Неповна *Beta*-функція — це узагальнення *Beta*-функції, якщо у формулі (1) замість визначеного інтегралу означити невизначений [5]:

$$B_x \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1} \right) = \int_0^x t^{\frac{n}{n+1}} (1-t)^{\frac{m}{m+1}} dt \quad (12)$$

При  $x = 1$  неповна *Beta*-функція перетворюється у повну.

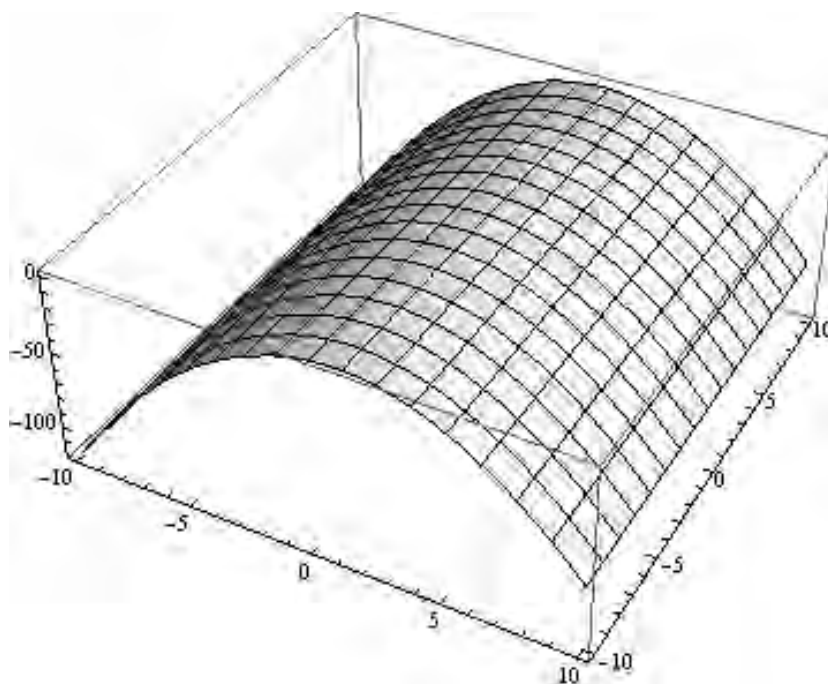


Рис. 4. Графік нормованої неповної *Beta*-функції  $I_x(1;2)$

Нормована неповна *Beta*-функція визначається через повну і неповну *Beta*-функції:

$$I_x \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1} \right) = \frac{B_x \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1} \right)}{B \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1} \right)}. \quad (13)$$

Функція у точках 0 та 1 обчислюється за формулами

$$I_0\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right) = 0 \quad (14)$$

$$I_1\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right) = 1 \quad (15)$$

Неповна *Beta*-функція має властивість доповнення за формулою:

$$I_x\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right) = 1 - I_{1-x}\left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{n+1}\right) \quad (16)$$

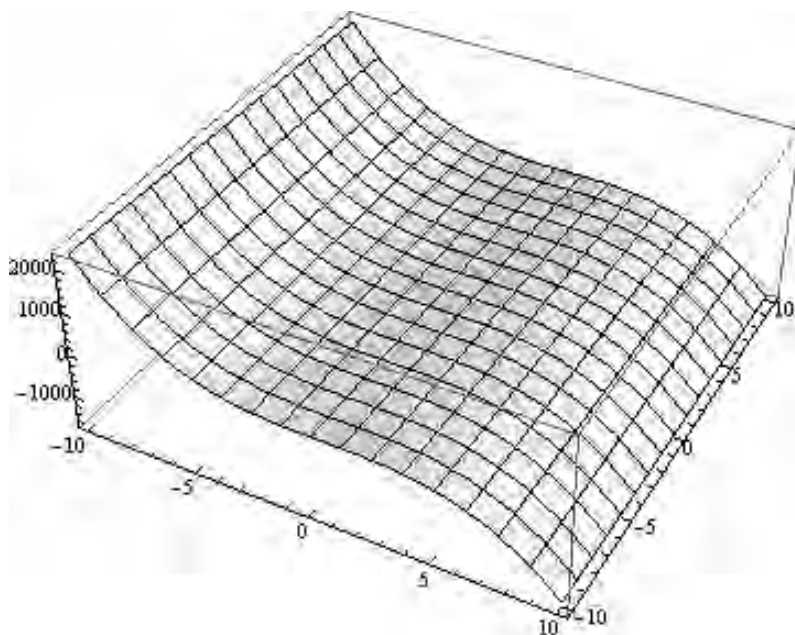


Рис. 5. Графік нормованої неповної *Beta*-функції  $I_x(2, 2)$

### 1.3. Властивості Гама-функції

Функцію вигляду

$$\tilde{A}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{n}{n+1}} e^{-t} dt \quad (17)$$

називають *Гама*-функцією [5].

Функція  $\tilde{A}$  є визначеною для  $\frac{1}{n+1} > 0$ . Функція  $\tilde{A}$  є нескінченно диференційована.

Формула вираження *Гама*-функції через *Гама*-функцію з меншим аргументом є такою:

$$\tilde{A}\left(\frac{1}{n+1} + 1\right) = \frac{1}{n+1} \tilde{A}\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad (18)$$

*Гама*-функція також має формулу доповнення у вигляді

$$\tilde{A}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi \cdot \frac{1}{n+1}\right)} \tilde{A}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad \left(0 < \frac{1}{n+1} < 1\right) \quad (19)$$

Графік *Гама*-функції наведений на рис. 6.

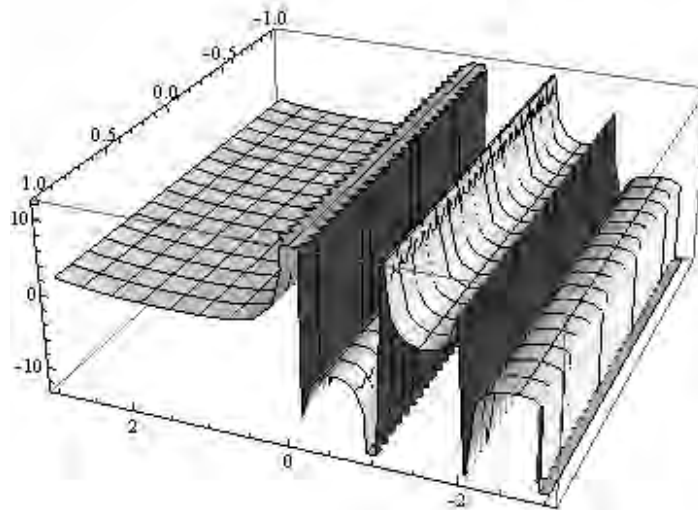


Рис. 6. Графік Гама-функції на площині  $[-10; 10] \times [-10; 10]$

Гама-функція використовується в математичній статистиці та у фізиці.

## 2. Математичні моделі, що використовують спеціальні функції

### 2.1. Коливні процеси з одним ступенем вільності

Математичний апарат *Ateb*-функцій дає можливість отримати аналітичні розв'язки системи диференціальних рівнянь, які описують істотно нелінійні процеси системи з одним ступенем вільності [2]

$$\begin{cases} \dot{x} + \beta y^m = 0 \\ \dot{y} + \alpha x^n = 0 \end{cases} \quad (20)$$

де  $\alpha, \beta$  – деякі дійсні постійні, а

$$n = \frac{2\theta'_1 + 1}{2\theta''_1 + 1}, \quad m = \frac{2\theta'_2 + 1}{2\theta''_2 + 1}, \quad (\theta'_1, \theta'_2, \theta''_1, \theta''_2 = 0, 1, 2, \dots) \quad (21)$$

*Ateb*-функції є оберненням до *Beta*-функцій. Неповна *Beta*-функція визначена рівністю (12) залежно від параметрів дає різні типи обернених функцій

Розглянемо два випадки, а саме:

$$p = \frac{1}{n+1}, \quad q = \frac{1}{m+1}; \quad (22)$$

$$p = \frac{1}{n+1}, \quad q = \frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1}, \quad (23)$$

Якщо  $p > 0, q > 0$ , то *Beta*-функція  $B_x\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\right)$  є визначеною та неперервною, а для інших значень  $p$  та  $q$  вона прямує в нескінченність при  $x \rightarrow 0, x \rightarrow 1$ .

*Ateb*-функції побудовані для значень (22) називаються періодичними, а для значень (23) – гіперболічними (аперіодичними) *Ateb*-функціями. Система (20), якщо  $m, n$  задовольняє співвідношення (22), описує коливальний рух, а, якщо  $m, n$  задовольняє співвідношення (23), – гіперболічний (аперіодичний) рух [6].

$$\omega = -\frac{m+1}{2} \int_1^{-1 \leq u \leq 1} (1-u)^{-m+1} u^{-\frac{n}{n+1}} du \quad (24)$$

У формулі (24)  $\omega$  є функцією від  $\nu$ , а також від  $n$  і  $m$ . Для побудови *Ateb*-функцій розглядаємо обернену залежність  $\nu$  від  $\omega$ , що є одночасно функцією  $n$  і  $m$ , має назву косинус *Ateb*-функції [6] та позначається

$$\nu = ca(m, n, \omega) \quad (25)$$

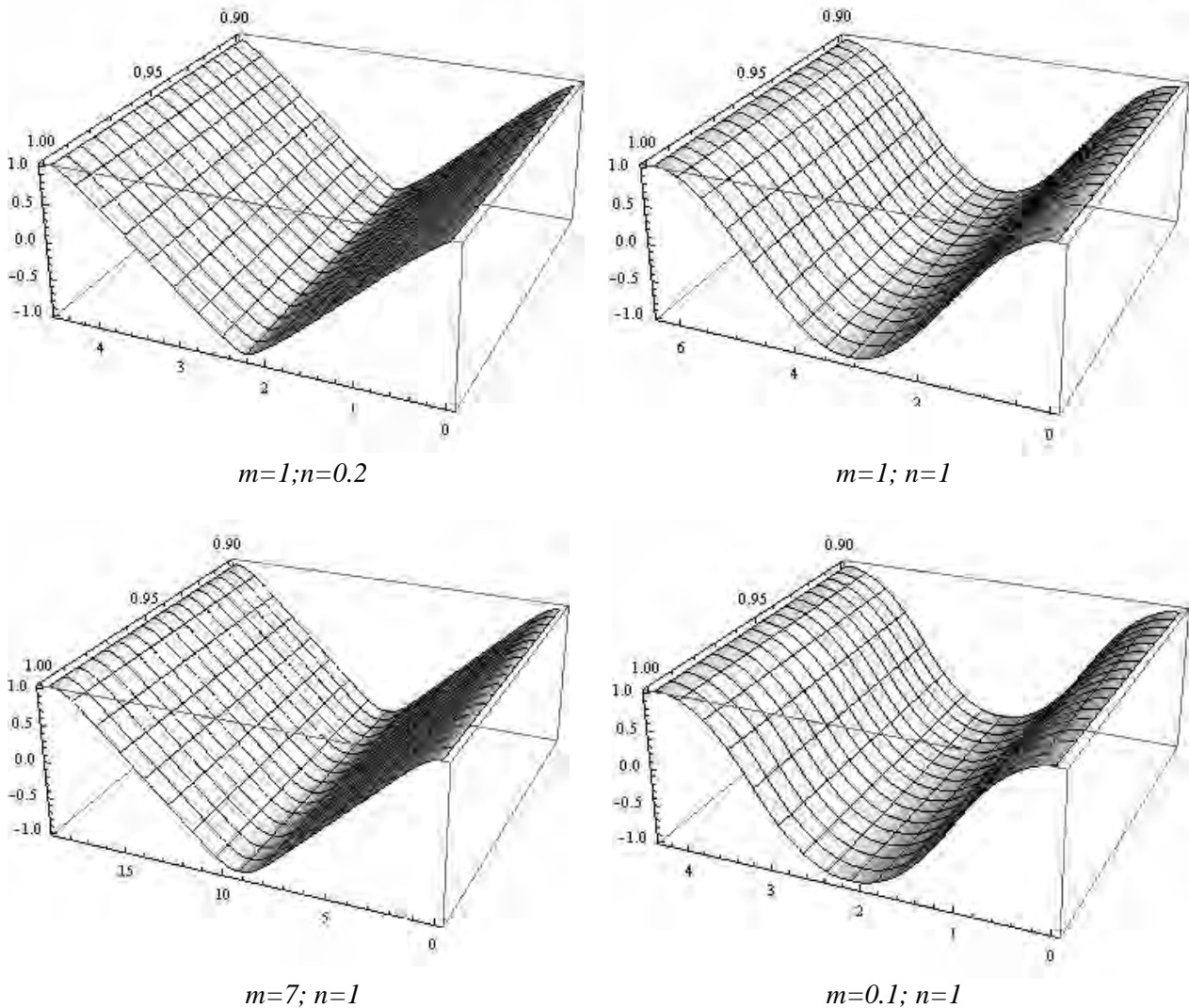


Рис. 7. Графіки *Ateb*-функцій  $ca(1;0.2)$ ,  $ca(1;1)$ ,  $ca(7;1)$ ,  $ca(0.1;1)$

## 2.2. Моделі нелінійних коливних систем

### 2.2.1. Поздовжні, поперечні та крутильні нелінійні коливання

У 1970-х роках ХХ ст. учень П. М. Сеника А. М. Возний вперше розклав періодичні та гіперболічні *Ateb*-функції в ряди Тейлора в околі початкового значення аргументу  $\omega = 0$  при  $n = 1$ . А. М. Возний застосовував *Ateb*-функції для дослідження руху об'єкта із постійною масою під дією сил фронтального опору, пропорційних нелінійній швидкості руху, було розв'язано динамічну частину задачі, яка зводиться до мінімізації інтегралу [6]. Розв'язок рівняння Ейлера цієї варіаційної задачі виражається через гіперболічні (аперіодичні) *Ateb*-функції.

А. М. Возний розглянув питання побудови усереднених розв'язків для істотно нелінійних систем диференціальних рівнянь. Він побудував асимптотичні розв'язки нелінійних коливних систем, систем із повільно змінним параметром, а також нелінійного рівняння типу Ван-дер-Поля з малим параметром.

У 80–90 роках ХХ ст. розвиток теорії *Ateb*-функцій продовжив Б. І. Сокіл [2]. Він довів ортонормованість періодичних *Ateb*-функцій. Це дало можливість дослідити одночастотні

нелінійні коливання одновимірних тіл у резонансному та нерезонансному випадках. Було досліджено поздовжні та крутильні коливання нелінійно пружних валів, стержнів за різних способів закріплення. Також досліджено одночастотні нелінійні поперечні коливання нелінійно пружних балок. Б. І. Сокіл отримав у замкнутому вигляді співвідношення, які дають змогу оцінити вплив на амплітудно-частотний процес динамічних систем з розподіленими параметрами різної природи сил, зокрема сил опору, в'язко-пружних, періодичних та інших сил. Він також розв'язав задачу про поширення нелінійних поздовжніх та поперечних хвиль за допомогою *Ateb*-функцій.

### 2.2.2. Модель коливання струни

Кожну точку струни довжиною  $L$  можна охарактеризувати значенням її абсциси  $x$ . Якщо обмежитися зміщенням струни тільки в одній площині, то для визначення положення струни в момент часу  $t$  достатньо задати зміщення  $u(x, t)$  точки  $x$  в момент  $t$  [7]. Якщо розглядати струну як гнучку пружну нитку, то рівняння коливання струни задається у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (26)$$

де  $u(x, t)$  – зміщення струни від положення рівноваги,  $\alpha^2 = \frac{T}{\rho}$ , де  $T$  – величина натягу струни, а  $\rho$  – густина.

Якщо вважати, що струна закріплена на кінцях та задані відповідні початкові умови, то розв'язок рівняння (26) можна записати у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{\alpha \pi n}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\alpha \pi n}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad (27)$$

де  $A_n, B_n$  – довільні коефіцієнти, що визначаються з початкових умов.  $u(x, t)$  можна подати у вигляді

$$u_n(x, t) = a_n \cos\frac{\alpha \pi n}{L}(t + \sigma_n) \sin\frac{\pi n x}{L} \quad (28)$$

де

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\alpha \pi n}{L} \delta_n = -\arctg \frac{B_n}{A_n} \quad (29)$$

З цієї формули видно, що кожна точка струни  $x_0$  здійснює гармонічне коливання  $u_n(x_0, t)$  з амплітудою  $a_n \sin\frac{\pi n}{L} x_0$ .

### 2.3. Теорія суперструн

Теорія струн заснована на гіпотезі, що всі елементарні частинки виникають у результаті коливань і взаємодій ультрамікроскопічних квантових струн. Цей підхід, з одного боку, дає змогу уникнути таких труднощів квантової теорії поля, як перенормування, а з іншого, призводить до глибшого погляду на структуру матерії і простору-часу.

Квантова теорія струн виникла у 1968р., коли молодий італійський фізик-теоретик Габріель Венеціано зміг описати за допомогою ідеї квантових струн сильну взаємодію адронів [8]. Венеціано довів, що амплітуда парного розсіяння високоенергетичних піонів описується однією з *Beta*-функцій. Ця амплітуда відома як амплітуда Венеціано, інтерпретується як амплітуда розсіяння тахіонів, що відповідає 4 відкритим струнам.

У випадку 4 однакових частинок амплітуда Венеціано задається сумою трьох *Beta*-функцій у вигляді

$$A(s, t, u) = A(s, t) + A(s, u) + A(t, u) \quad (30)$$

де

$$A(s, t) = \frac{\tilde{A}(-\alpha(s)) \tilde{A}(-\alpha(t))}{\tilde{A}(-\alpha(s) - \alpha(t))} = B(-\alpha(s), -\alpha(t)) \quad (31)$$



де  $\alpha(s)$  – лінійно зростаюча траєкторія Регге  $\alpha(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s$ , а  $s, t, u$  є змінними Мандельштама:

$$s = -(p_1 + p_2)^2 \quad t = -(p_3 + p_2)^2 \quad u = -(p_1 + p_3)^2. \quad (32)$$

Тут позначено  $p_1, p_2, p_3$  три 4-імпульси частинок, що взаємодіють [8]. Цей опис розглядається для частинок з часом життя  $\tau < 10^{-16}$  с.

Роботи Венеціано стали початком досліджень, спрямованих на пояснення механізму сильної взаємодії на основі квантової теорії струн на відстанях порядку одного фермі. Як було згодом показано у багатьох дослідженнях за допомогою *Beta*-функції описуються багато властивостей елементарних частинок, що беруть участь у сильній взаємодії. У 1970 р. Еїтіро Намбу, Холгер Бен Нільсен і Леонард Саскінд виявили фізичний зміст *Beta*-функції. Було доведено, що сильна взаємодія елементарних частинок буде описуватися *Beta*-функцією, якщо ці частинки зображати у вигляді коливних одновимірних струн. Ця теорія отримала назву теорії суперструн. Однак виявилось, що квантову теорію струн коректно (без від'ємних або великих одиниць квантових ймовірностей) можна побудувати лише в 10 і 26 вимірах.

Суперструни існують в 10-мірному просторі-часі, в той час як ми живемо в 4-вимірному, тобто сприймаємо різними органами чуттів тільки три просторові і одну часову координати. І якщо суперструни описують наш Всесвіт, нам необхідно пов'язати між собою ці два простори. Для цього зазвичай згортають 6 додаткових вимірів до дуже маленького розміру (порядку  $10^{-35}$  м). Мала величина цієї відстані є абсолютно непомітною не лише для ока, але і для всіх сучасних прискорювачів елементарних частинок. Після згортання отримується 4-вимірний простір, кожній точці якого відповідає згорнутий 6-вимірний простір, так званий простір Калабі-Яу [9].

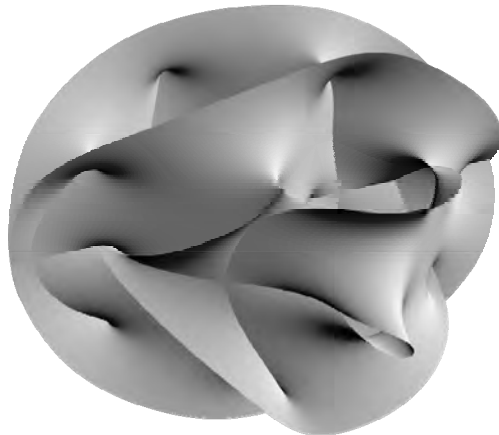


Рис. 8. Проекція шестивимірного простору Калабі — Яу [9]

Описане вище показує, що в теорії струн математично точно доводиться фізичний зміст *Beta*-функції, який полягає в описі залежності амплітуди коливень мікрочастинок від часу.

Розглянемо тепер обернену залежність, яка задається *Ateb*-функцією. Згідно з математичним визначенням оберненої функції (якщо пряма функція  $f(x) \rightarrow y$ , то обернена  $f^{-1}(y) \rightarrow x$ ) маємо наступний фізичний зміст *Ateb*-функції стосовно теорії струн.

*Ateb*-функція описує залежність часу від амплітуди коливень мікрочастинок. Така інтерпретація повністю відповідає висновкам, що випливають з теорії струн. У [9] доводиться, що час для мікрочастинок є змінною величиною, яка залежить від гармонік (амплітуд) коливень мікрочастинок, якщо ці мікрочастинки трактувати як маленькі коливні одновимірні струни.

### 3. Застосування для захисту інформації

У пунктах 1, 2 показано, що *Beta*- і *Ateb*-функції описують різні фундаментальні поняття у багатьох сферах науки. Фундаментальність означень дозволяє знаходити нові сфери застосування цих функцій. Запропоновано застосування цих функцій для поліграфічного захисту інформації [10]. Виникає необхідність постійного вдосконалення наявних методів захисту поліграфічної

продукції та розробки нових методів захисту. Сьогодні для розроблення захисних сіток та гільйошних елементів використовується апарат кривих Без'є. Автори пропонують замість кривих Без'є використати криві *Ateb*-функцій для задачі захисту інформації. Математичний спосіб задання *Beta* і *Ateb*-функцій, як видно з формул (1), (12), (24) є достатньо простим, але водночас оберненим і неявним. Таке задання *Ateb*-функцій поруч з аналітичною формулою робить складним та трудомістким обчислення значень цих функцій.

Побудова принципово нових методів захисту інформації спонукала до використання іншого математичного апарата. Таким апаратом у цьому дослідженні є теорія *Ateb*-функцій. Використання саме цих функцій для побудови графічних примітивів захисту зумовлене низкою переваг [10], а саме:

1) історично *Beta*-, *Ateb*-функції уведені під час досліджень у математичному аналізі, квантовій фізиці, механіці та математичній статистиці, тому для проблем поліграфічного захисту ніколи не використовувались, що забезпечує унікальність запропонованих методів захисту;

2) *ateb*-функції залежать від двох раціональних параметрів, які можуть бути використані для розв'язання задачі ідентифікації інформації;

3) вирази *Ateb*-функцій є достатньо складними, що не дає змоги обчислювати без розроблення спеціальної інформаційної технології;

4) Для поліграфічного захисту аналітичність виразів дає змогу отримати єдину формулу для побудови усієї потрібної кривої та передбачити чи задана точка належатиме цій кривій у площині заповнення, що дозволяє точніше проводити побудову захисних елементів.

#### 4. Висновки

Введені Ейлером у середині XVIII ст. для опису співвідношень у математичному аналізі *Beta*-та *Гама*-функції упродовж наступних століть знайшли широке застосування у інших галузях науки, а саме: у математичній статистиці, рівняннях математичної фізики, механіці, квантовій фізиці та інформаційних технологіях. У 60-х роках минулого століття Розенберг розглянув функції, обернені до *Beta*-функцій, так звані *Ateb*-функції, які теж успішно до сьогодні застосовуються у різних сферах науки, зокрема у диференціальних рівняннях, механіці та інформаційних технологіях. Наведене дослідження показує, що об'єднує застосування *Beta* та *Ateb*-функцій у різних сферах науки, стислість та лаконічність математичного опису фундаментальних для цієї галузі понять.

1. Rosenberg R. *The Ateb(h) – functions and their properties* // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1963. – Vol. 21, N1. – P. 37–47. 2. Сокіл Б.І. Про застосування *Ateb*-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // *Доп. НАН України*. – 1997, № 1. – С. 55–58. 3. Грыцык В.В., Дронюк И.М., Назаркевич М.А. Информационные технологии защиты документов средствами *Ateb*-функций. Часть 1. Построение базы данных *Ateb*-функций для защиты документов // *Проблемы управления и информатики*, 2009, № 2. – С. 139–152. 4. Назаркевич М. Розвиток теорії *Ateb*-функцій – як перспективний інструментарій захисту друкованих документів // *Комп'ютерні технології друкарства. Збірник наукових праць*. – Львів. – 2011. – № 25. – С. 241–246. 5. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 296 с. 6. Сенник П. М. Численное обращение одного класса неполной *Beta*-функции / П. М. Сенник, А. М. Возный. // *Математическая физика*. – 1973. – № 14. – С. 160–164. 7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики: Учеб. пособие*. – М.: Изд-во МГУ, 1999. 8. P. Di Vecchia *The Birth of String Theory* – *Cambridge University Press*, 2008. – 118 p. 9. Цвибах Б. *Начальный курс теории струн. Перевод с англ.*: – М.: Едиториал, 2011. – 784 с. 10. Грыцык В.В., Дронюк И.М., Назаркевич М.А. Информационные технологии защиты документов средствами *Ateb*-функций. Ч. 2. Об одном способе защиты электронных и напечатанных документов // *Проблемы управления и информатики*, 2009, № 3. – С. 144–153.