

І. Процько

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ОСНОВНИХ ВИДІВ ДКП НА БАЗІ ЦИКЛІЧНИХ ЗГОРТОК

© Процько І., 2012

Розглянуто підхід ефективного обчислення основних чотирьох видів дискретного косинусного перетворення (ДКП) на базі циклічних згорток. Параметри твірної масиви базисної квадратної матриці використано для синтезу алгоритму.

Ключові слова: дискретні косинусні перетворення, твірний масив, синтез алгоритму, циклічна згортка.

The general method of efficient computation four types discrete cosine transform using of circular convolutions is considered. The parameters of hash array of basis square matrix for algorithm synthesis are used.

Key words: discrete cosine transforms, hash array, algorithm synthesis, cyclic convolution.

Вступ

Починаючи з середини 60-х років, інтенсивно розвивались швидкі обчислення дискретних перетворень класу Фур'є (ДПФ). У багатьох роботах акцентувалась увага на перспективності застосування тільки дійсних обчислень. У 1974 р. в роботі [1] запропоновано дискретне косинусне перетворення (ДКП), дійсний базис якого відтворює функціональні в просторі або часі залежності аналогічно ДПФ. Дискретні синусні перетворення (ДСП) запропоновано в 1976 р. в роботі [2], що також використовують арифметику дійсних чисел. Косинусні і синусні перетворення та перетворення Фур'є взаємозв'язані строгими математичними співвідношеннями, що дає змогу знайти ефективний спосіб обчислення одного перетворення через друге [3].

ДКП знайшло своє широке застосування з деяких причин. По-перше, базисні функції ДКП добре апроксимують функції перетворення Карунена-Лоева для широкого класу стаціонарних випадкових процесів, тобто дозволяють описувати сигнал з заданою точністю з мінімальним числом компонент. По-друге, ДКП входить як складова частина в деякі ефективні алгоритми ДПФ, наприклад, алгоритм Капоріна-Уенга [4,5]. По-третє, ДКП містить особливі властивості, завдяки тому, що перетворення сконцентровано в нижніх індексах інтенсивніше і обнулення решта вихідних значень не приводить до істотної втрати енергії сигналу, що дає змогу запобігти крайовим ефектам під час блокового кодування зображень [6]. ДКП використовують в багатьох прикладних задачах, особливо в обробленні цифрових сигналів аудіо та відео.

Подальший інтенсивний розвиток інформаційних технологій задає більші вимоги, ніж ДКП та їх алгоритмічними, програмно-апаратними засобами з швидкодії та розвитку функціональних й специфічних можливостей перетворень.

Аналіз літературних джерел

Більше трьох десятиліть досліджувалось ефективне обчислення одно-двовимірних ДКП, що називали швидкими алгоритмами. Отримано значну кількість публікацій, присвячену ефективному обчисленню [7]. Багатоваріантність ефективних обчислень розділяють на алгоритми з основою два, розчеплену основою, змішану основою, непарного обсягу, складеного обсягу і алгоритм простих множників.

Для синтезу ефективних алгоритмів ДКП використовують підходи:

- 1) прямої факторизації матриці ДКП;
- 2) непряме обчислення через швидке перетворення Фур'є або через дискретне перетворення Хартлі;
- 3) алгоритми, що базуються на теорії складності.

Доведено, що два види ДКП являються поліноміальними перетвореннями, і в одному випадку це було використано для одержання швидкого алгоритму. Показано, що чотири види ДКП мають групову симетрію (тобто властивості, що належать до теорії груп і їх представлень) і для кожного з них швидкий алгоритм виводиться суто алгебраїчно [8].

Роботи з швидких ДКП узагальнюються та систематизуються і завершальним кроком в цьому напрямі є теорія створення швидких алгоритмів [9].

Постановка проблеми

Обчислення ДКП та ІДКП (прямого та інверсного) є однією з найбільш емких і тривалих процедур в інформаційних технологіях, наприклад, під час стиснення та розпакування кадрів зображень. Тобто ця процедура в найбільшому ступені потребує вдосконалень, що дадуть змогу пришвидшити роботу програмного та апаратного забезпечення.

Одним з напрямків ефективних алгоритмів є можливість обчислення ДКП через циклічні згортки. Цей напрям ефективного обчислення використовує наявність алгоритмів швидкої згортки [10]. Особливо багато публікацій, пов'язаних з обчисленням поширеного в застосуваннях ДКП через циклічні згортки, з'явилося з початку 90-х років ХХ ст. [11–14].

У більшості досліджень використовують перехід від обчислення дискретного перетворення до циклічних згорток, застосовуючи переіндексацію для простого обсягу за Рейдером [10] або розклад складеного обсягу перетворення на прості множники за Агарвалом і Кулі [10], або комбінуючи ці підходи. У роботі [15] розглянуто приведення дискретних перетворень класу Фур'є до циклічних структур. Використання способу обчислення на основі згорток має свої особливості для визначення ДКП різних видів, що проаналізовані в цій роботі.

Види ДКП

Дискретне косинусне перетворення відображає вхідні дані в лінійну комбінацію зважених базисних функцій. Існує 8 видів дискретного косинусного перетворення, що розглянуті в роботі [16]. Ці перетворення є подальшим вдосконаленням ДПФ для дійсних вхідних даних. Відповідно до теорії ДПФ для косинусних перетворень з базисом від 0 до π необхідно продовжити вхідну послідовність двічі. Вісь симетрії дискретних вибірок може бути на вибірці (парна кількість) або між двома вибірками, що відповідає зсуву на половину інтервалу дискретизації. Це дає різні варіанти перетворення відповідно до крайових умов дійсних вхідних даних.

Продовження дійсних вхідних даних може розширюватись (рис. 1): на вибірку симетрично (WS), на вибірку асиметрично (WA), на піввибірку симетрично (HS), на піввибірку асиметрично (HA).

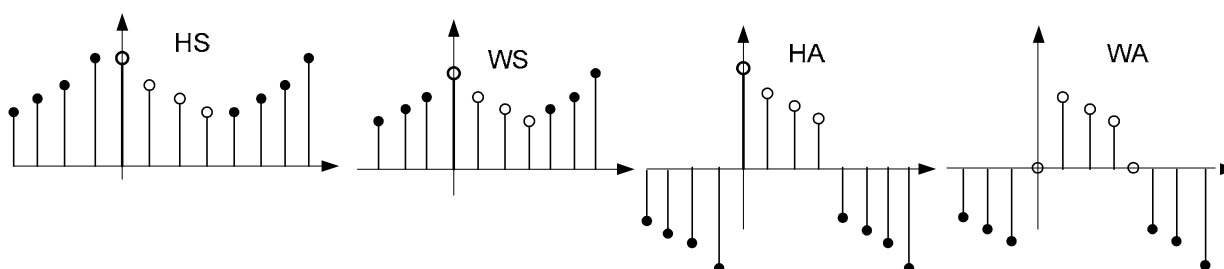


Рис. 1. Варіанти розширення вхідної кінцевої послідовності

Існує тільки дві осі симетрії для обмеженої послідовності і, відповідно, можливі такий набір варіантів ϵ -видів розширення, що відповідає 8 видам ДКП (табл. 1).

Таблиця 1

ε	WSWS	HSHS	WSWA	HSHA	WSHS	HSWS	WSHA	HWSA
ДКП	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

Взаємозв'язок прямих та зворотних (транспонованих) обчислень ДКП в загальному можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} (\text{ДКП}^I_N)^{-1} &= (\text{ДКП}^I_N)^T = (\text{ДКП}^I_N); & (\text{ДКП}^{II}_N)^{-1} &= (\text{ДКП}^{II}_N)^T = (\text{ДКП}^{III}_N); \\ (\text{ДКП}^{III}_N)^{-1} &= (\text{ДКП}^{III}_N)^T = (\text{ДКП}^{II}_N); & (\text{ДКП}^{IV}_N)^{-1} &= (\text{ДКП}^{IV}_N)^T = (\text{ДКП}^{IV}_N); \end{aligned}$$

Для ДКП I-го, IV-го видів симетричні прямі і зворотні перетворення, а перетворення II-го і III-го виду видів переходять одне в друге.

Обчислення ДКП та ІДКП (інверсного) є однією з найбільш ємнісних і тривалих процедур в інформаційних технологіях, наприклад, під час стиснення та розпакування кадрів зображень. Розглянемо ефективне обчислення ДКП I–IV на основі циклічних згорток, що дозволять пришвидшити роботу програмного та апаратного забезпечення в багатьох застосуваннях.

Ефективне обчислення ДКП I–IV на базі циклічних згорток

Інформаційні технології широко застосовують ДКП I–IV-го видів, які представлені виразами відповідно виду

$$\text{для ДКП-I} \quad X^{c1}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^N t_k t_n x(n) \cos\left[\frac{kn\pi}{N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (1)$$

$$\text{для ДКП-II} \quad X^{c2}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} t_k x(k) \cos\left[\frac{(2n+1)k\pi}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

$$\text{для ДКП-III} \quad X^{c3}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} t_n x(n) \cos\left[\frac{(2k+1)n\pi}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

$$\text{для ДКП-IV} \quad X^{c4}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(k) \cos\left[\frac{(2k+1)(2n+1)\pi}{4N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

$$\text{де } t_j = \begin{cases} 1, & j \neq 0, N \\ 1/\sqrt{2}, & j = 0, N \end{cases}$$

Проаналізуємо структуру матриці базису для видів ДКП за аргументами компонентів $c_{k,n}$, що дорівнюють відповідно

$$\text{для ДКП-I} \quad c_{k,n} = kn \pi / N, \quad (k, n=0, 1, \dots, N); \quad (5)$$

$$\text{для ДКП-II} \quad c_{k,n} = k(2n+1) \pi / 2N, \quad (k, n=0, 1, \dots, N-1); \quad (6)$$

$$\text{для ДКП-III} \quad c_{k,n} = (2k+1)n \pi / 2N, \quad (k, n=0, 1, \dots, N-1); \quad (7)$$

$$\text{для ДКП-IV} \quad c_{k,n} = (2k+1)(2n+1) \pi / 4N, \quad (k, n=0, 1, \dots, N-1). \quad (8)$$

Базисні функції періодичні (2π), симетричні (π), асиметричні ($\pi/2$) для кожного з видів ДКП відповідно (табл. 2).

Перетворення	періодичні	симетричні	асиметричні
ДКП-I	відносно 2N вибірок	відносно N вибірок	відносно N/2 вибірок
ДКП-II	відносно 4N вибірок	відносно 2N вибірок	відносно N вибірок
ДКП-III	відносно 4N вибірок	відносно 2N вибірок	відносно N вибірок
ДКП-IV	відносно 8N вибірок	відносно 4N вибірок	відносно 2N вибірок

Матриця аргументів косинусних перетворень, враховуючи періодичність, буде

$$C_a^I(k,n) = [(k n) \bmod (2N)], \quad (9)$$

$$C_a^{II}(k,n) = [k(2n+1) \bmod (4N)], \quad (10)$$

$$C_a^{III}(k,n) = [(2k+1)n \bmod (4N)] \quad (11)$$

$$C_a^{IV}(k,n) = [(2k+1)(2n+1) \bmod (8N)], \quad (12)$$

На основі підстановки з рядків цих матриць формується твірний масив $P(n)$.

Спрощені елементи матриці аргументів визначаються послідовним виконанням обчислень

для ДКП-I $c_{k,n} = 2N - [(c_{k,n}) \bmod 2N]$, якщо $[(c_{k,n}) \bmod 2N] > N$; (13)

$$c_{k,n} = N - \{2N - [(c_{k,n}) \bmod 2N]\}, \text{ якщо } \{2N - [(c_{k,n}) \bmod 2N]\} > N/2, \quad (14)$$

інакше $c_{k,n} = c_{k,n}$.

для ДКП-II та ДКП-III

$$c_{k,n} = 4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N], \text{ якщо } [(c_{k,n}) \bmod 4N] > 2N; \quad (15)$$

$$c_{k,n} = 2N - \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N]\}, \text{ якщо } \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N]\} > N, \quad (16)$$

інакше $c_{k,n} = c_{k,n}$.

для ДКП-IV $c_{k,n} = 8N - [(c_{k,n}) \bmod 8N]$, якщо $[(c_{k,n}) \bmod 8N] > 4N$; (17)

$$c_{k,n} = 4N - \{8N - [(c_{k,n}) \bmod 8N]\}, \text{ якщо } \{8N - [(c_{k,n}) \bmod 8N]\} > 2N, \quad (18)$$

інакше $c_{k,n} = c_{k,n}$.

Спрощена матриця аргументів доповнюється матрицями знаків Sc косинуса, що визначаються за нерівностями

для ДКП-I $Sc[k,n] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 3N/2 < c_{k,n} < N/2 \\ 0, & \text{якщо } c_{k,n} = N/2, 3N/2 \\ -1, & \text{якщо } N/2 < c_{k,n} < 3N/2 \end{cases}, \quad (19)$

для ДКП-II та ДКП-III $Sc[k,n] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 3N < c_{k,n} < N \\ 0, & \text{якщо } c_{k,n} = N, 3N \\ -1, & \text{якщо } N < c_{k,n} < 3N \end{cases}, \quad (20)$

для ДКП-IV $Sc[k,n] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 2N > c_{k,n} > 6N \\ 0, & \text{якщо } c_{k,n} = 2N, 6N \\ -1, & \text{якщо } 2N < c_{k,n} < 6N \end{cases}. \quad (21)$

Отже, за виразами (13,15,17) визначаються елементи і формується з рядків твірний масив $P(n)$, а потім з $P(n)$ за виразами (14,16,18) визначаються елементи спрощеного твірного масиву $P'(n)$ та матриці знаків Sc , що беруть участь в ефективному обчисленні дискретних косинусних перетворень.

Синтез ефективного обчислення ДКП

Запропонований підхід для ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень, що базуються на декомпозиції базисної гармонічної функції розглянуто в роботах [17, 18].

У результаті підходу, структуру базисної матриці можна задати твірним масивом

$$P(n) = P(n_1) P(n_2) \dots P(n_k) = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L_1})(n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L_2}) \dots (n_{kL_1}, n_{kL_2}, \dots, n_{kL_k}) \quad (22)$$

де k – число підмасивів, де n_{ij} – елемент підмасиву, L_i – кількість елементів в підмасиві $P(n_i)$, що i задає n – обсяг загального масиву для різних представлень, визначається:

$$n = (L_1 + L_2 + \dots + L_k). \quad (23)$$

Число k підмасивів в $P(n)$ визначається як за значенням N (просте, складене) обсягу перетворення, так і видом ДКП. Твірний масив $P(n)$ задає порядок елементів вхідних даних під час обчислення дискретного перетворення.

Властивості симетрії та періодичності базису перетворення ДКП приводять до ефективнішого представлення меншими значеннями елементів твірних підмасивів $P'(n)$ з доповненнями відповідних підмасивів знаків $S(n)$. Підматриці знаків $S(n)$ містять значення елементів, що дорівнюють $+1, -1, 0$.

Твірний масив $P(n)$ перетворення визначає особливість структури базисної матриці ДКП приведеної до циклічних підматриць [17]. Тому можна виділити параметри, що характеризують $P(n)$ і відповідно видозмінену базисну матрицю:

- k – кількість підмасивів у твірному масиві $P(n)=P(n_1)P(n_2)\dots P(n_k)$;
- число елементів кожного твірного підмасиву (L_1, L_2, \dots, L_k) ;
- перший елемент кожного твірного підмасиву $n_{i1}, i=1(1)k$.

Наступним кроком синтезу в алгоритмі обчислення ДКП є визначення однотипових циклічних підматриць. Тобто, знаходження однакових та квазіоднакових підматриць (мають однакові індекси, але протилежні значення знаків) на основі значень параметрів твірного масиву $P(n)$ і спрощеного твірного масиву індексів $P'(n)$, що доповнюється масивом знаків $S(n)$. Значення параметрів спрощеного твірного масиву

$$P'(n)=P'(n_1)P'(n_2)\dots P'(n_k), S_c = S_c(n_1) S_c(n_2)\dots S_c(n_k)$$

для даного обсягу N і виду перетворення ДКП визначаються за спрощеною матрицею C_a відповідно (14,16,18), масив знаків S_c за $C_a(k,n)$.

Для визначення однотипових циклічних підматриць значення елементів матриці можуть бути задані попередньо, однак великий перебір всіх елементів потребує значних обсягів пам'яті для їх збереження і відповідних часових затрат. Ефективніший шлях можливість визначення тільки перших елементів підматриць під час аналізу структури базису за координатами розміщення підматриць. Тобто обчислюються за координатами рядка і стовпця значення перших елементів підматриці і аналізуються між собою.

Відповідність координат (i, j) елементам твірного масиву $P(n_i)$ та $P'(n_i)$:

$$\begin{array}{l} (i \setminus j) \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad \dots \quad n \\ P(n_i) \quad (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L_1}, n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L_2}, \dots, n_{kL_1}, n_{kL_2}, \dots, n_{kL_k}) \\ P'(n_i) \quad (n'_{11}, n'_{12}, n'_{13}, \dots, n'_{1L_1}, n'_{21}, n'_{22}, n'_{23}, \dots, n'_{2L_2}, \dots, n'_{kL_1}, n'_{kL_2}, \dots, n'_{kL_k}). \end{array}$$

Координати перших елементів підматриць визначаються за $(i+L_i), (j+L_i)$ де L_i – вибирається за приналежності до твірного підмасиву значень перших елементів підматриць у матричній структурі. Перші елементи обчислюються за відповідними визначеними координатами (i, j) і відповідатимуть елементу $P'(n)$ твірного масиву визначені за виразами (14,16,18) відповідно виду перетворення ДКП (табл. 3).

Таблиця 3

$(i+L_i, j+L_i) - n_{ij}$ (координати рядок/стовпець) – знак і значення першого елементу підматриць $s_{c_{ij}}$;			
$(1,1) - s_{c_{ij}}$		$(1,1+L_1) - s_{c_{ij}}$...
			$(1, 1+L_1+L_2+\dots+L_k) - s_{c_{ij}}$
			$(1+L_k, 1+L_1+L_2+\dots+L_k) - s_{c_{ij}}$
$(1+L_1,1) - s_{c_{ij}}$		$(1+L_1, 1+L_1) - s_{c_{ij}}$...
			$(1+2L_k, 1+L_1+L_2+\dots+L_k) - s_{c_{ij}}$
			$(1+3L_k, 1+L_1+L_2+\dots+L_k) - s_{c_{ij}}$
$(1+L_1+L_2,1) - s_{c_{ij}}$		$(1+L_1+L_2, 1+L_1) - s_{c_{ij}}$...
			$(1+4L_k, 1+L_1+L_2+\dots+L_k) - s_{c_{ij}}$
			...
$(1+L_1+L_2+\dots+L_k,1) - s_{c_{ij}}$	$(1+L_1+L_2+\dots+L_k, 1+L_k) - s_{c_{ij}}$	$(1+L_1+L_2+\dots+L_k, 1+2L_k) - s_{c_{ij}}$	$(1+L_1+L_2+\dots+L_k, 1+3L_k) - s_{c_{ij}}$
			...
			$(1+L_1+L_2+\dots+L_k, 1+L_1+L_2+\dots+L_k) - s_{c_{ij}}$

Визначення однотипових циклічних підматриць виконується через відбір за координатами перших елементів однакових підматриць по горизонталі. Для координат рядків, кратних простим множникам розкладу обсягу N в структурі, виконуємо об'єднання вхідних даних по горизонталі, виконанням поелементних додавань вхідних значень.

Ці значення будуть використовуватись для обчислення циклічних згорток при аналізі по вертикалі. Тобто, відбір за координатами перших елементів однакових підматриць по вертикалі і обчислення циклічних згорток з вхідними значеннями. При аналізі підматриць по вертикалі для координат стовпців кратних простим множникам розкладу обсягу N в структурі виконуємо одно-разове обчислення циклічних згорток. За наявності, решта незадіяних підматриць виконуються циклічні згортки за своїми параметрами на основі визначених координат.

Об'єднання результатів згорток виконується по горизонталі на основі відповідних координат перших елементів підматриць. Одержані вихідні значення перетворення відповідають порядку відповідно до значень твірного масиву $P(n)$.

Приклади синтезу ефективного обчислення ДКП

Розглянемо приклад узагальненої схеми визначення однотипових циклічних підматриць необхідних для обчислення ДКП-II і ДКП-III обсягу $N=7$.

Сформоване значення твірного масиву для ДКП-III за підстановкою відповідає виду:

$$P(13) = P(n_1)P(n_2)P(n_3)P(n_4)P(n_5) = (1,3,9)(13,11,5) (2,6,10) (12,8,4) (7) ,$$

$$P'(13) = (1,3,5)(1,3,5) (2,6,4)(2,6,4) (7), Sc(13) = (+ + -)(- - +) (+ + -)(- - +) (0),$$

Визначення параметрів : $k=5$ – кількість підмасивів в твірному масиві;

$L_1=3, L_2=3, L_3=3, L_4=3, L_5=1$ – кількість елементів в підмасивах $P(n_i)$ задають обсяг циклічних згорток;

Відповідність координат (i, j) елементам твірного масиву $P(n_i)$ та $P'(n_i)$:

(i, j)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	(1, 3, 9)	(13,11,5)	(2, 6, 10)	(12, 8, 4)	(7)								
	(1, 3, 5)	(1, 3, 5)	(2, 6, 4)	(2, 6, 4)	(7)								

Координати знака та перших елементів підматриць подано в табл. 4.

Таблиця 4

$(i+L_i, j+L_i) - n_{ij}$ (координати рядок/стовпець) – знак і значення першого елемента				
$(1,1) - +1;$	$(1,4) - -1;$	$(1,7) - +2;$	$(1,10) - - 2;$	$(1,13) - 0;$
$(4,1) - -1;$	$(4,4) - +1;$	$(4,7) - +2;$	$(4,10) - -2;$	
$(7,1) - 0;$		$(7,7) - -1;$	$(7,10) - +1;$	

Для ДКП-II сформоване значення твірного масиву за підстановкою відповідає вигляду:

$$P'(13) = (1\ 3\ 5) (2\ 6\ 4) (7), Sc(13) = (+ + -) (+ + -)(0) \text{ для першого стовпця.}$$

Координати знака та перших елементів підматриць для ДКП-II подано в табл. 5.

Таблиця 5

$(i+L_i, j+L_i) - n_{ij}$ (координати рядок/стовпець) – знак і значення першого елемента					
$(1,1) - +1;$	$(1,4) - +1;$	$(1,7) - -1;$	$(1,10) - - 1;$	$(1,13) - 0;$	$(1,14) - 0;$
$(4,1) - +2;$	$(4,4) - +2;$	$(4,7) - +2;$	$(4,10) - +2;$	$(4,13) - -1;$	$(4,14) - -1;$
$(7,1) - 0;$					

Відповідно до прикладів (табл. 4, 5) для ДКП-III і ДКП-II, необхідно виконати по дві триточкові циклічні згортки. Завершується обчислення вихідних значень дійсних дискретних коефіцієнтів ДКП-II і ДКП-III, об'єднанням результатів згорток по горизонталі на основі відповідних координат перших елементів підматриць.

Особливості розподілу циклічних структур та їх характеристик визначає складність алгоритму обчислення кожного виду ДКП.

Висновки

Ефективне обчислення кожного з чотирьох видів ДКП можна виконати на основі відповідного переставлення елементів вхідної послідовності з подальшим використанням швидких алгоритмів циклічної згортки. Визначення твірного масиву, за яким відбувається переставлення, не потребує спеціальних обчислень і задається підстановкою на основі двох рядків матриці аргументів базисів ДКП. Використання твірного масиву $P(n)$ приводить до однотипового підходу проведення організації обчислення ДКП дійсних послідовностей даних довільного обсягу. Окреме проведення обчислень циклічних згорток, на який структуровано базис видів ДКП так і подальше об'єднання одержаних результатів дає змогу ефективно організувати процес обчислення, зменшуючи ємність опрацювання інформації.

1. N. Ahmed, T. Natarajan, and K. R. Rao, *Discrete cosine transform*, *IEEE Trans. Comput.*, C-23 (1974), pp. 90–93.
2. Jain, A.K., *A fast Karhunen–Loève transform for a class of random processes*, *IEEE Trans. on Communications*, 24, 1023, 1976.
3. R. Gluth, “Regular FFT-related transform kernels for DCT/DST-based polyphase filter banks,” *Proc. IEEE ICASSP 1991*, pp.2205–2208, Toronto, Canada, May 1991.
4. Канорин И. Е. Новый алгоритм быстрого преобразования. Фурье. — *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1980, т.20, №4. — С.1054–1058.
5. Sorensen H.V., Jones, D. L., Heideman, M. T., & Burrus, C. S., *Real Valued Fast Fourier Transform Algorithms*, *IEEE Trans. ASSP*, Vol. 35, No. 6, June 1987. pp.849–863.
6. А. Онпенгейм, Р. Шаффер *Цифровая обработка сигналов* Москва: Техносфера, 2006. — 856 с.
7. Britanak, V., *A unified approach to fast computation of discrete sinusoidal transforms I: DCT and DST transforms*, *Computers and Artificial Intelligence*, 17, 583, 1998.
8. V. Britanak, P. Yip, and K. R. Rao, *Discrete Cosine and Sine Transforms*. New York, NY: Academic Press, 2007.
9. S. Egner and M. Pueschel, “Automatic generation of fast discrete signal transforms”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 49, No. 9, September 2001, pp. 1992–2002.
10. Маккеллан Дж., Рейдер Ч. *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов*. — М.: Радио и связь, 1983.
11. Y.-H. Chan and W.-C. Siu, “A cyclic correlated structure for the realization of discrete cosine transform”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems – II: Analog and Digital Signal Processing*, Vol. 39, No. 2, February 1992, pp. 109–113.
12. N.-C. Hu and K.-C. Lin, “Skew-circular/circular correlation decomposition of prime-factor DCT”, *IEE Proceedings – Vision Image and Signal Processing*, Vol. 142, No. 4, August 1995, pp. 241–246.
13. Anna Tatsaki, Chrissavgi Dre, Thanos Stouraitis, and et.al. *Prime-factor DCT algorithms*, *IEEE Trans. Signal proc.*, 1995, 43(3): 772-776.
14. R.-X. Yin and W.-C. Siu, “A new fast algorithm for computing prime-length DCT through cyclic convolutions”, *Signal processing*, Vol. 81, No. 5, May 2001, pp. 895–906.
5. Чуприна О.О., Удосконалений алгоритм ШПФ на базі швидкої згортки // *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка"*, № 618, 2008. — С.174–179.
16. Z. Wang and B. Hunt, *The discrete W-transform*, *Appl. Math. Comput.*, 16 (1985), pp. 19-48.
17. Процько І.О., Ефективне обчислення дискретних косинусних перетворень / *Комп'ютерні системи проектування* // *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка"*. № 591, 2007. — С.58–63.
18. Патент 96540 Україна, G06F 17/16 (2006.01), H03M 7/30 (2006.01). Спосіб приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток. / Процько І.О. / *відповідає* Опубл. 10.11.2011, Бюл. №21.