

В. Гавриш, О. Нитребич
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра програмного забезпечення

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У ПЛОСКИХ ЕЛЕМЕНТАХ МІКРОЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЇВ ІЗ НАСКРІЗНИМИ ЧУЖОРІДНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

© Гавриш В., Нитребич О., 2012

Розглядається стаціонарна задача теплопровідності для ізотропної смуги з наскрізним чужорідним теплоактивним прямокутним включенням. За допомогою кусково-лінійної апроксимації температури на краях включення та інтегрального перетворення Фур'є побудовано аналітично-числовий розв'язок задачі з крайовими умовами другого роду. Виконано числові розрахунки температурного поля та проаналізовано їх для заданих геометричних і теплофізичних параметрів.

Ключові слова: температура, теплопровідність, стаціонарна, ізотропна, чужорідне наскрізне прямокутне теплоактивне включення, ідеальний тепловий контакт.

The steady state problem of thermal conduction for isotropic strip with heat-generating foreign reach-through rectangular inclusion has been considered. Using piecewise linear approximation of the temperature on the inclusion edges and applying the Fourier integral transform the analytical-numerical solution of the heat conduction problem with boundary conditions of second order has been formed. The numerical calculations of temperature fields have been conducted and analyzed for given geometrical and thermophysical parameters.

Key words: temperature, thermal conduction, steady state, isotropic, foreign reach-through rectangular heat-active inclusion, ideal thermal contact.

Вступ

Розвиток мікроелектроніки, особливо в останні десятиріччя, вимагає великого обсягу точних знань теплофізичних характеристик матеріалів. Без них зараз неможливо виконати практично жодної важливої конструкторської чи технологічної розробки. Серед великої кількості теплофізичних характеристик однією з важливих, особливо для твердих тіл, є теплопровідність, що визначає поширення тепла і тим самим структуру температурного поля в матеріалі. Найточнішим способом визначення теплопровідності твердих тіл є безпосередні експериментальні вимірювання, які для окремих елементів і вузлів мікроелектронних пристроїв є достатньо складними. Механізм перенесення теплоти теплопровідністю в твердих тілах доволі детально вивчається теоретично, хоча точні залежності, які дають змогу визначити її розрахунковим шляхом, практично є відсутніми через незнання коефіцієнтів, що входять до розрахункових формул.

Деякі дослідження температурних режимів для вузлів та окремих елементів мікроелектронних пристроїв виконано раніше [1–8].

Нижче сформульовано крайову задачу теплопровідності, побудовано аналітичний розв'язок та виконано числовий аналіз для окремих конструктивних елементів мікроелектронних пристроїв, які описуються ізотропною смугою із наскрізним чужорідним включенням прямокутної форми, що виділяє тепло. Наведено [9,10] загальні рівняння теплопровідності для кусково-однорідних тіл.

Формулювання задачі

Розглянемо ізотропну в сенсі теплофізичних характеристик смугу завтовшки $2l$, в якій міститься чужорідне наскрізне прямокутне теплоактивне включення завдовжки $2h$, віднесено до декартової прямокутної системи координат (Oxy) . В області $\Omega_0 = \{(x, y) : |x| \leq h, |y| \leq l\}$, що

займає включення, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю $q_0 = const$. На краях $K_{\pm} = \{(\pm h, y) : |y| \leq l\}$ включення відбувається ідеальний тепловий контакт, а на краях $\Gamma_{\pm} = \{(x, \pm l) : |x| < \infty\}$ смуги задано крайові умови другого роду (рис.1).

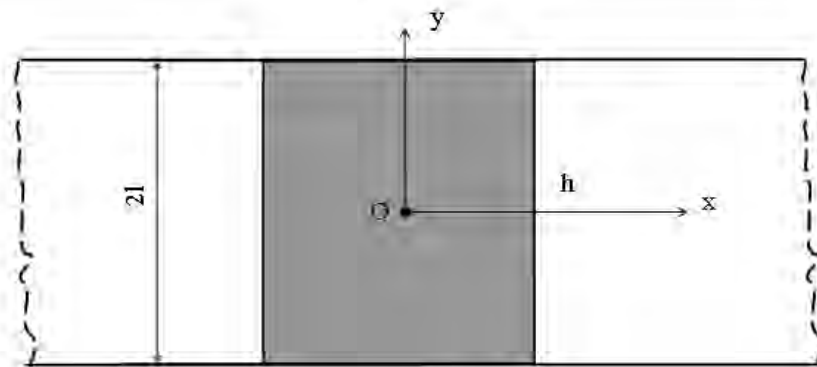


Рис. 1. Ізотропна смуга з чужорідним наскрізним теплоактивним прямокутним включенням

Математична модель процесу теплопровідності

Розподіл стаціонарного температурного поля $t(x, y)$ в розглядуваній системі отримаємо, розв'язавши рівняння теплопровідності [9,10]

$$\frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x) \frac{\partial t}{\partial x}] + \lambda(x) \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = -q_0 S_{\pm}(h - |x|) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$t|_{|x| \rightarrow \infty} = t_c, \quad \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{|y|=l} = 0, \quad (2)$$

де

$$\lambda(x) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1) S_{\pm}(h - |x|) - \quad (3)$$

коефіцієнт теплопровідності неоднорідної смуги; λ_1, λ_0 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів смуги та включення відповідно; t_c – температура зовнішнього середовища;

$$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0 \\ 0,5 \mp 0,5, & \zeta = 0 \\ 0, & \zeta < 0 \end{cases} \text{ – асиметричні одиничні функції [11].}$$

Введемо функцію

$$T = \lambda(x)\theta \quad (4)$$

і продиференціюємо її за змінною x , враховуючи опис коефіцієнта теплопровідності $\lambda(x)$ (3). У результаті отримаємо:

$$\lambda(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} - (\lambda_0 - \lambda_1) \cdot [\theta|_{x=-h} \cdot \delta_{-}(x+h) - \theta|_{x=h} \cdot \delta_{+}(x-h)]. \quad (5)$$

Тут $\theta = t - t_c$ – надлишкова температура ; $\delta_{\pm}(\zeta) = \frac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$ – асиметричні дельта-функції

Дірака [11].

Підставивши вираз (5) у співвідношення (1), отримуємо диференціальне рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами

$$\Delta T - (\lambda_0 - \lambda_1) \cdot [\theta|_{x=-h} \cdot \delta'_{-}(x+h) - \theta|_{x=h} \cdot \delta'_{+}(x-h)] = -q_0 S_{\pm}(h - |x|), \quad (6)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат.

Отже, шукане температурне поле в розглядуваній системі цілком визначається з рівняння (6) та крайових умов (2).

Побудова аналітичного розв'язку

Апроксимуємо функції $\theta(\pm h, y)$ виразами

$$\theta(\pm h, y) = \theta_1^\pm + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^\pm - \theta_j^\pm) S_-(y - y_j), \quad (7)$$

де $y_j \in]-l; l[; y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n-1}; \theta_j^\pm (j = \overline{1, n})$ – невідомі апроксимаційні значення надлишкової температури $\theta(x, y)$.

Підставивши вирази (7) у рівняння (6), отримаємо:

$$\Delta T = (\lambda_0 - \lambda_1) \left\{ [\theta_1^- + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^- - \theta_j^-) S_-(y - y_j)] \cdot \delta'_+(x + h) - \right. \\ \left. - [\theta_1^+ + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^+ - \theta_j^+) S_-(y - y_j)] \cdot \delta'_+(x - h) \right\} - q_0 S_-(h - |x|). \quad (8)$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до рівняння (8) та крайових умов (2) із урахуванням співвідношення (4), отримуємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dy^2} - \xi^2 \bar{T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{ i\xi (\lambda_0 - \lambda_1) \cdot [e^{i\xi h} (\theta_1^+ + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^+ - \theta_j^+) S_-(y - y_j)) - \\ - e^{-i\xi h} (\theta_1^- + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^- - \theta_j^-) S_-(y - y_j))] - \frac{2q_0}{\xi} \sin \xi h \} \quad (9)$$

і крайові умови

$$\left. \frac{d\bar{T}}{dy} \right|_{|y|=l} = 0, \quad (10)$$

де $\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} T d\xi$ – трансформанта функції $T(x, y)$; ξ – параметр інтегрального перетворення Фур'є; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Загальний розв'язок рівняння (9) запишеться у вигляді

$$\bar{T} = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y} + \frac{1}{\xi \sqrt{2\pi}} \{ i (\lambda_0 - \lambda_1) [e^{-i\xi h} (\theta_1^- + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^- - \theta_j^-) (1 - ch\xi(y - y_j)) S_-(y - y_j)) - \\ - e^{i\xi h} (\theta_1^+ + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^+ - \theta_j^+) (1 - ch\xi(y - y_j)) S_-(y - y_j))] + \frac{2q_0}{\xi^2} \sin \xi h \}.$$

Тут c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Використавши крайові умови (10), отримаємо частковий розв'язок задачі (9), (10)

$$\bar{T} = \frac{1}{\xi \sqrt{2\pi}} \{ i (\lambda_0 - \lambda_1) [e^{-i\xi h} (\theta_1^- + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^- - \theta_j^-) \cdot (\frac{ch\xi(l+y)}{sh2\xi l} sh\xi(l-y_j)) + \\ + (1 - ch\xi(y - y_j)) S_-(y - y_j))] - e^{i\xi h} (\theta_1^+ + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^+ - \theta_j^+) \cdot (\frac{ch\xi(l+y)}{sh2\xi l} sh\xi(l-y_j) + \\ + (1 - ch\xi(y - y_j)) S_-(y - y_j))] + \frac{2q_0}{\xi^2} \sin \xi h \}. \quad (11)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (11), одержимо

$$T(x, y) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \{ (\lambda_0 - \lambda_1) [\sin \xi(x+h)(\theta_1^- + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^- - \theta_j^-) (\frac{ch \xi(l+y)}{sh 2 \xi l} sh \xi(l-y_j) + (1 - ch \xi(y-y_j)) S_-(y-y_j))) - \sin \xi(x-h)(\theta_1^+ + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^+ - \theta_j^+) (\frac{ch \xi(l+y)}{sh 2 \xi l} sh \xi(l-y_j) + (1 - ch \xi(y-y_j)) S_-(y-y_j))] + \frac{2q_0}{\xi^2} \cdot \cos \xi x \sin \xi h \} d\xi. \quad (12)$$

Невідомі апроксимаційні значення θ_j^\pm ($j = \overline{1, n}$) надлишкової температури знаходимо, розв'язавши систему $2n$ лінійних алгебраїчних рівнянь, отриману з виразу (12).

Отже, шукане температурне поле в смузі з наскрізним прямокутним включенням, що виділяє тепло, описує формула (12). Зі співвідношення (12) отримуємо значення температури в довільній точці смуги та чужорідного включення.

Аналіз числових результатів

Виконано числовий аналіз безрозмірної надлишкової температури $T^* = T / (q_0 h^2)$ для таких вихідних даних: матеріал шару – кераміка ВК94-I ($\lambda_1 = 13,4 \text{ вт} / (\text{м} \cdot \text{С}^0)$), матеріал включення – срібло ($\lambda_0 = 419 \text{ вт} / (\text{м} \cdot \text{С}^0)$), $n = 10$ – кількість розбиттів інтервалу $]-l; l[$; $L = l / h = 1$.

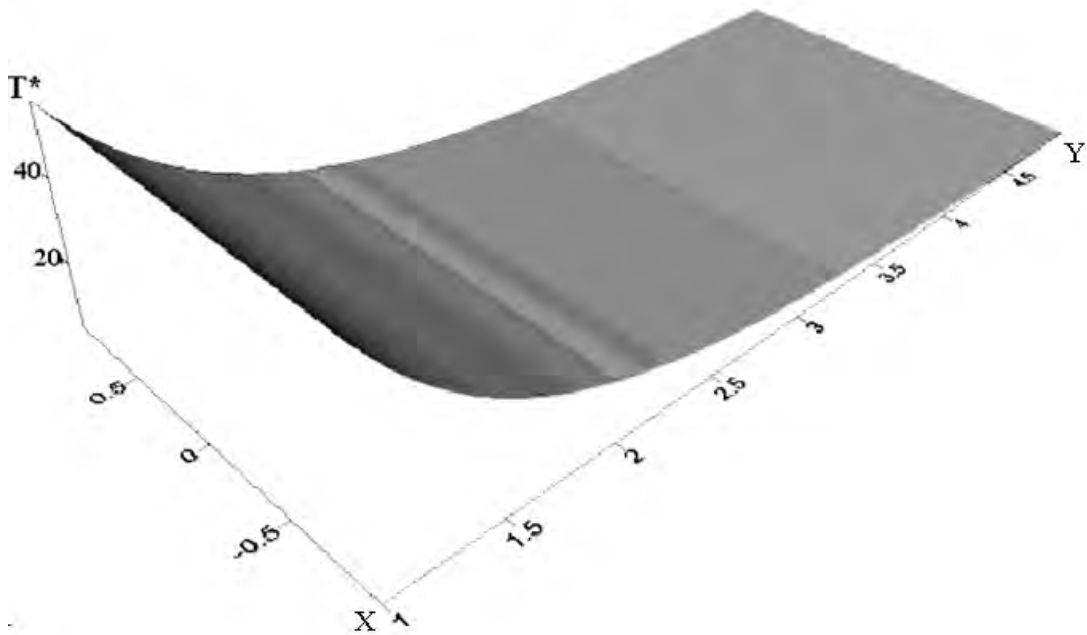


Рис. 2. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірних координат X та Y

Побудовано (рис. 2) залежність температури T^* від безрозмірних $X = x / h$ та $Y = y / h$ координат. Як бачимо, максимальної температури досягають в області дії рівномірно розподілених за площею прямокутного наскрізного чужорідного включення внутрішніх джерел тепла.

Рис. 3 ілюструє зміну температури T^* залежно від координати Y для різних значень координати X . Як видно із графіків, температура змінюється лінійно і практично є сталою для наведених значень X , причому значення її значно відрізняються в області включення ($X = 0$) та в смузі по за ним ($X = 2$), що відповідає розглядуваній фізичній моделі.

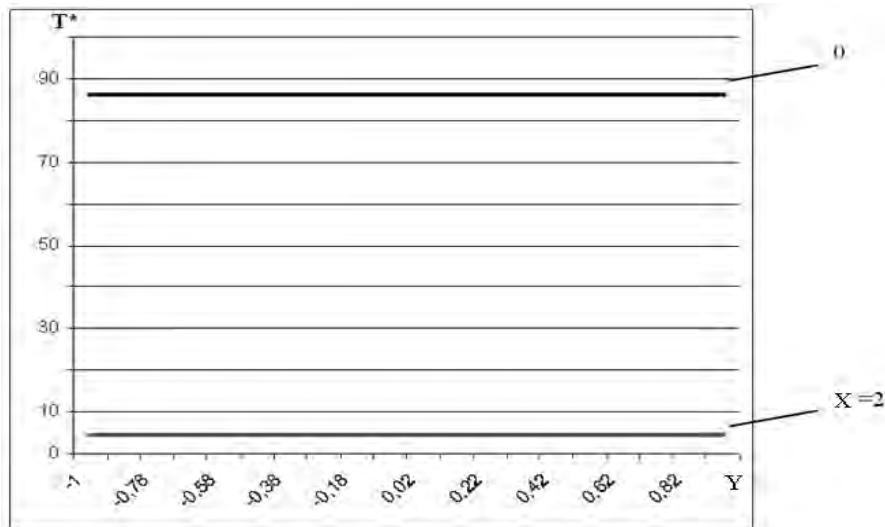


Рис. 3. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірної координати Y

Висновки

Із використанням методу, який ґрунтується на застосуванні узагальнених функцій, кусково-лінійної апроксимації температури на краях включення та інтегрального перетворення Фур'є побудовано аналітичний розв'язок крайової задачі теплопровідності для смуги з чужорідним наскрізним включенням прямокутної форми, що виділяє тепло. Встановлено, що за товщиною ізотропної смуги температура змінюється за лінійним законом для крайових умов другого роду. Отримано числові результати на основі розроблених алгоритмів та програмних засобів, які дають змогу аналізувати температурні режими в окремих елементах та вузлах мікроелектронних пристроїв, які описуються ізотропною смугою із чужорідним наскрізним прямокутним теплоактивним включенням.

1. Барвінський А.Ф. Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла / А.Ф. Барвінський, В.І. Гавриш // *Проблеми машиностроєння*. – 2009. – 12, № 1. – С. 47-53.
2. Гавриш В.І. Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням / В.І. Гавриш, Д.В. Федасюк // *Промышленная теплотехника*. – 2010. – 32, № 5. – С. 18–25.
3. Гавриш В.І. Гранична задача теплопровідності для шару з чужорідним циліндричним включенням / В.І. Гавриш, Д.В. Федасюк, А.І. Косач // *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. – 2010. – 46, № 5. – С. 115-120.
4. Gavrysh V.I. Thermal simulation of heterogeneous structural components in microelectronic devices / V.I. Gavrysh, D.V. Fedasyuk // *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics*. – 2010. – 13, № 4. – P. 439–443.
5. Гавриш В.І. Моделирование температурных режимов в элементах микроэлектронных устройств / В.І. Гавриш, А.І. Косач // *Технология и конструирование в электронной аппаратуре*. – 2011. № 1–2 (90). – С. 27–30.
6. Гавриш В.І. Моделювання теплового стану в термочутливому елементі потужного світлодіода / В.І. Гавриш, А.І. Косач // *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" Комп'ютерні науки та інформаційні технології*. – 2011. – № 694. – С. 254–259.
7. Гавриш В.І. Моделирование температурных режимов в электронных устройствах кусочно-однородной структуры / В.І. Гавриш, А.І. Косач // *Электронное моделирование*. – 2011. – 33, № 4. – С. 99–113.
8. V.I. Gavrysh. Modelling of temperature conditions in the three-dimensional piecewise homogeneous elements of microelectronic devices // *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics*. – 2011. – 14, № 4. – P. 478–482.
9. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 386 с.
10. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
11. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1977. – 720 с.