

<sup>1,2</sup>В. Самотий, <sup>1</sup>У. Дзелендзяк<sup>1</sup> Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра комп’ютеризованих систем автоматичної<sup>2</sup> Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki,  
Katedra Automatyki i Techniki Informatycznej

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФЕРОМАГНЕТНОГО ПОТРОЮВАЧА ЧАСТОТИ НА БАЗІ ТРИФАЗНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

© Самотий В., Дзелендзяк У., 2012

Наведено математичну модель феромагнетного потроювача частоти на базі трифазного трансформатора, а також запропоновано метод аналізу перехідних та усталених процесів.

**Ключові слова:** феромагнетний потроювач частоти, трифазний трансформатор, перехідні процеси, усталені процеси, модель чутливостей до початкових умов.

**Mathematical model of the ferromagnetic frequency tripler on the basis of three-phase transformer is resulted and method for transient and steady-state analysis of its operational modes is suggested.**

**Key words:** ferromagnetic frequency tripler, three-phase transformer, transient operational modes, steady-state operational modes, sensitivity model to entry conditions.

### Вступ

Феромагнетні помножувачі частоти виконують множення частоти сигналу живлення в кратну кількість разів 2, 3, 4, ... Залежно від значення коефіцієнта множення частоти змінюватиметься їх конструкція. Фундаментальним явищем, за рахунок якого виконується множення частоти, є нелінійна залежність напруженості магнетного поля осердь помножувача від їх індукції  $H = H(B)$ . Це приводить до появи вищих гармонічних складових у струмах обмоток. Феромагнетні помножувачі частоти мають конструкцію, яка забезпечує компенсацію першої гармоніки в контурі навантаження. Саме тому в напрузі навантаження перша гармоніка відсутня взагалі. Виділивши ту чи іншу гармоніку, отримаємо відповідне множення частоти. Таке виділення відбувається шляхом конструктивних рішень.

### Аналіз публікацій

Досліджувати динаміку роботи електромагнетних пристроїв можна емпірично або шляхом математичного моделювання, що передбачає їх математичний опис. Такий опис слід подати в змінних стану, якими є фізичні величини (потокозчеплення, струми і напруги) що визначають стан пристрою в кожний момент часу. В нашому випадку математична модель зводиться до запису системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно змінних стану. Аналізуючи динаміку роботи електромагнетних пристроїв, потрібно розв'язати дві основні задачі: розрахунок перехідних і усталених процесів.

Для дослідження перехідних процесів існує багато ефективних методів. Одним з них є метод сумування скінченних приростів [2], основною перевагою якого є простота побудови комп'ютерного алгоритму. По-перше, для цього методу відсутня проблема схемних вироджень. По-друге, він обчислює скінченні прирости, тому завдання для ЕОМ відразу подається мовою алгебри. По-третє, в методі сумування скінченних приростів розв'язана проблема малих сталих часу. З суто математичного погляду цей метод тісно пов'язаний з пошуком коренів алгебричних рівнянь за методом продовження за параметром [6]. У роботі [1] запропонована модель нелінійних крайових

задач, яка побудована на диференціально-тейлорівських перетвореннях. Новий математичний метод дослідження нелінійних систем наведено у праці [5]. В основу цього методу покладено ідею про запис шуканого наближеного розв'язку у вигляді розкладів за деякими спеціальними функціями, які є розв'язками породжуючого рівняння. Такий підхід є дуже обмеженим і не може конкурувати з універсальнішими методами.

Для аналізу усталених процесів можна скористатися методами гармонічного балансу [3], екстраполяційними методами [4] та моделлю чутливостей до початкових умов [7].

### Математична модель феромагнетного потроювача частоти

Феромагнетний потроювач частоти виконує перетворення трифазної напруги в однофазну потрібної частоти. Застосовується він у силових електроенергетичних пристроях та автоматиці, зокрема як модулятор. Розглянемо потроювач, що побудований на трифазному трансформаторі, який живиться від джерела трифазної напруги.

Параметри вторинних обмоток трансформатора і навантаження вважаємо приведеними за числом витків до первинних. Вторинні обмотки сполучені послідовно, тому результуюча ЕРС у вихідному сигналі потроювача за першою гармонікою дорівнюватиме нулю (рис. 1). За рахунок нелінійності характеристик намагнення у вихідному контурі потроювача будуть присутні непарні гармоніки. Найвагомішою з них буде третя, що і обумовлює принцип роботи пристрою.

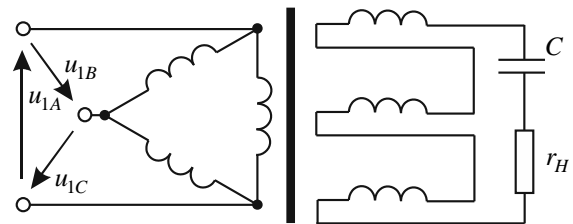


Рис. 1. Принципова схема феромагнетного потроювача частоти

Розглянемо рівняння феромагнетного потроювача частоти на базі трифазного трансформатора. Нехай первинна обмотка з'єднана трикутником. Параметри вторинної обмотки вважаємо приведеними за числом витків до первинної. При формуванні рівнянь стану вважатимемо, що параметри всіх фаз відрізняються один від одного. Вхідною дією є напруга живлення, яку вважаємо заданою. Рівняння обмоток первинної сторони трансформатора

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = U_1 - R_1 I_1, \quad (1)$$

де  $\Psi_1, U_1, I_1$  – матриці-стовпчики повних поточкозчеплень, напруг і струмів  $h(h = \Psi_1, U_1, I_1) = [h_A, h_B, h_C]^T$ ;  $R_1 = \text{diag}[r_{1A}, r_{1B}, r_{1C}]$  – діагональна матриця опорів. Тут індекси  $A, B, C$  вказують на причетність до відповідних фаз,  $1$  – до первинної сторони трансформатора.

Рівняння вторинної сторони запишемо в контурних величинах.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Psi_2}{dt} &= \frac{d\Psi_{2A}}{dt} + \frac{d\Psi_{2B}}{dt} + \frac{d\Psi_{2C}}{dt}, \\ \frac{d\Psi_2}{dt} &= -u_C - R_2 i_2, \quad R_2 = r_{2A} + r_{2B} + r_{2C} + r_H, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де  $\Psi_{2k} (k=A, B, C)$ ,  $\Psi_2$  – повні фазні та контурне поточкозчеплення контуру навантаження;  $i_2$  – струм навантаження. Оскільки вторинні обмотки сполучені послідовно в один контур з навантаженням, то вони однакові

$$i_{2A} = i_{2B} = i_{2C} = i_2. \quad (3)$$

Рівняння струмів будуть

$$i_{1k} = \alpha_{1k} (\Psi_{1k} - \Psi_k), \quad (4)$$

$$i_{2k} = \alpha_{2k} (\Psi_{2k} - \Psi_k), \quad (5)$$

де  $\alpha_{jk}$  – величини, обернені індуктивностям розсіяння обмоток;  $\Psi_k$  – робочі поточкозчеплення фаз;  $k=A, B, C$ .

Згідно з (5) маємо

$$\Psi_{2k} = i_{2k} / \alpha_{2k} + \psi_k. \quad (6)$$

Підставимо (6) в (2) та отримаємо рівняння

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = \frac{1}{\alpha_{2A}} \frac{di_{2A}}{dt} + \frac{1}{\alpha_{2B}} \frac{di_{2B}}{dt} + \frac{1}{\alpha_{2C}} \frac{di_{2C}}{dt} + \frac{d\psi_A}{dt} + \frac{d\psi_B}{dt} + \frac{d\psi_C}{dt}. \quad (7)$$

Враховуючи залежність (3), запишемо диференціальне рівняння для струму навантаження

$$\frac{di_2}{dt} = \alpha_2 \left( \frac{d\Psi_2}{dt} - \frac{d\psi_A}{dt} - \frac{d\psi_B}{dt} - \frac{d\psi_C}{dt} \right), \quad (8)$$

де  $\alpha_2 = \alpha_{2A}\alpha_{2B}\alpha_{2C} / (\alpha_{2A}\alpha_{2B} + \alpha_{2A}\alpha_{2C} + \alpha_{2B}\alpha_{2C})$ .

Рівняння (8) можна записати у матричному вигляді

$$\frac{di_2}{dt} = \alpha_2 \left( \frac{d\Psi_2}{dt} - H^T \frac{d\psi}{dt} \right), \quad H = (1, 1, 1)^T, \quad (9)$$

де  $\psi = [\psi_A, \psi_B, \psi_C]^T$  – матриця-стовпчик робочих потокозчеплень фаз.

Рівняння конденсатора запишемо у вигляді

$$\frac{du_C}{dt} = i_2 / C. \quad (10)$$

Рівняння струмів первинної обмотки трансформатора (4) запишемо у матричному вигляді

$$I_1 = \alpha_1 (\Psi_1 - \psi), \quad (11)$$

де  $\alpha_1 = \text{diag}[\alpha_{1A}, \alpha_{1B}, \alpha_{1C}]$  – діагональна матриця обернених індуктивностей розсіяння первинної обмотки.

Диференціюючи за часом (11), отримаємо рівняння струмів первинної обмотки трансформатора в диференціальному вигляді

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha_1 \left( \frac{d\Psi_1}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \right), \quad (12)$$

Рівняння стану магнетного кола можна записати у вигляді системи трьох нелінійних алгебричних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} i_{1A} + i_2 &= \varphi_A(\psi_A) + \alpha_0(\psi_A + \psi_B + \psi_C), \\ i_{1B} + i_2 &= \varphi_B(\psi_B) + \alpha_0(\psi_A + \psi_B + \psi_C), \\ i_{1C} + i_2 &= \varphi_C(\psi_C) + \alpha_0(\psi_A + \psi_B + \psi_C), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

де  $\varphi_j(\psi_j)$ , ( $j = A, B, C$ ) – спадання магнетних напруг в осердях трансформатора, які є кривими намагнення фаз;  $\alpha_0$  – величина, обернена індуктивності розсіяння нульової послідовності. Продиференціюємо (13) за часом, враховуючи що

$$\frac{d\varphi_j(\psi_j)}{dt} = \frac{\partial \varphi_j(\psi_j)}{\partial \psi_j} \frac{d\psi_j}{dt}$$

тоді

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_{1A}}{dt} + \frac{di_2}{dt} &= \alpha_A'' \frac{d\psi_A}{dt} + \alpha_0 \left( \frac{d\psi_A}{dt} + \frac{d\psi_B}{dt} + \frac{d\psi_C}{dt} \right), \\ \frac{di_{1B}}{dt} + \frac{di_2}{dt} &= \alpha_B'' \frac{d\psi_B}{dt} + \alpha_0 \left( \frac{d\psi_A}{dt} + \frac{d\psi_B}{dt} + \frac{d\psi_C}{dt} \right), \\ \frac{di_{1C}}{dt} + \frac{di_2}{dt} &= \alpha_C'' \frac{d\psi_C}{dt} + \alpha_0 \left( \frac{d\psi_A}{dt} + \frac{d\psi_B}{dt} + \frac{d\psi_C}{dt} \right), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

де  $\alpha_j''$  – величини, обернені диференціальним індуктивностям фаз, які визначаємо за основними кривими намагнення

$$\alpha_j'' = \frac{\partial \varphi_j(\Psi_j)}{\partial \Psi_j} = \alpha_j''(\Psi_j). \quad (15)$$

Систему рівнянь (14) запишемо у матричній формі

$$\frac{dI_1}{dt} + H \frac{di_2}{dt} = P \frac{d\Psi}{dt} + \alpha_0 E_0 \frac{d\Psi}{dt}, \quad (16)$$

де  $P = \text{diag}[\alpha_A'', \alpha_B'', \alpha_C'']$  – діагональна матриця обернених диференціальних індуктивностей;  $E_0$  – матриця розмірності  $3 \times 3$ , всі елементи якої рівні 1.

Підставимо диференціальні рівняння струмів (9), (12) в рівняння стану магнетопровідника (16), отримаємо

$$\alpha_1 \left( \frac{d\Psi_1}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} \right) + H \alpha_2 \left( \frac{d\Psi_2}{dt} - H^T \frac{d\Psi}{dt} \right) = P \frac{d\Psi}{dt} + \alpha_0 E_0 \frac{d\Psi}{dt}, \quad (17)$$

або

$$(P + \alpha_0 E_0 + \alpha_1 + H \alpha_2 H^T) \frac{d\Psi}{dt} = \alpha_1 \frac{d\Psi_1}{dt} + H \alpha_2 \frac{d\Psi_2}{dt}, \quad (18)$$

звідки

$$\frac{d\Psi}{dt} = D_1 \frac{d\Psi_1}{dt} + D_2 \frac{d\Psi_2}{dt}, \quad (19)$$

де  $D_1 = G \alpha_1$ ,  $D_2 = G H \alpha_2$ ,  $G = (P + \alpha_0 E_0 + \alpha_1 + H \alpha_2 H^T)^{-1}$ .

Рівняння (1), (2) запишемо одним виразом

$$\frac{d\Psi}{dt} = U - RI, \quad (20)$$

де  $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2]^T$  – матриця-стовпчик повних потокозчеплень;  $I = [I_1, i_2]^T$  – матриця-стовпчик струмів;  $U = [U_1, -u_c]^T$  – матриця-стовпчик напруг;  $R = \text{diag}[R_1, R_2]$  – діагональна матриця активних опорів. Тоді рівняння (19) з урахуванням (20) запишемо у вигляді

$$\frac{d\Psi}{dt} = D(U - RI), \quad D = (D_1, D_2). \quad (21)$$

Підставимо (19) в (9), (12)

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha_1 \left( \frac{d\Psi_1}{dt} - D_1 \frac{d\Psi_1}{dt} - D_2 \frac{d\Psi_2}{dt} \right), \quad (22)$$

$$\frac{di_2}{dt} = \alpha_2 \left( \frac{d\Psi_2}{dt} - H^T D_1 \frac{d\Psi_1}{dt} - H^T D_2 \frac{d\Psi_2}{dt} \right). \quad (23)$$

Систему рівнянь (22), (23) з урахуванням позначень (20) запишемо у вигляді

$$\frac{dI_1}{dt} = A_1(U - RI), \quad A_1 = (\alpha_1(E - D_1), -\alpha_1 D_2), \quad (24)$$

$$\frac{di_2}{dt} = A_2(U - RI), \quad A_2 = (-\alpha_2 H^T D_1, \alpha_2(E - H^T D_2)). \quad (25)$$

Рівняння (20), (24) та (25) запишемо єдиним виразом

$$\frac{dX}{dt} = B(\Psi)Z(t), \quad Z(t) = (U - RI, i_2)^T, \quad (26)$$

де  $X = [\Psi, i_2, u_c]^T$  – вектор змінних стану;  $B = \text{diag}[M, C^{-1}]$  – матриця коефіцієнтів;  $M = [D, A_2]^T$ . Первинні струми визначаємо згідно з (13)

$$\left. \begin{aligned} i_{1A} &= \varphi_A(\Psi_A) + \alpha_0(\Psi_A + \Psi_B + \Psi_C) - i_2, \\ i_{1B} &= \varphi_B(\Psi_B) + \alpha_0(\Psi_A + \Psi_B + \Psi_C) - i_2, \\ i_{1C} &= \varphi_C(\Psi_C) + \alpha_0(\Psi_A + \Psi_B + \Psi_C) - i_2, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

а лінійні – як різницю двох суміжних фазних

$$i_A = i_{1A} - i_{1B}, \quad i_B = i_{1B} - i_{1C}, \quad i_C = i_{1C} - i_{1A}, \quad (28)$$

Розрахунок перехідних процесів зводиться до інтегрування рівнянь динаміки (26) за заданих початкових умов змінних стану  $X(0)$ . Усталений режим отримуємо за початкових умов  $X(0)$ , що задовольняють умову періодичності. Обчислюємо ці умови за допомогою моделі чутливостей до початкових умов. З використанням моделі чутливостей до початкових умов необхідно обчислити матрицю Якобі. Матрицю  $S$  визначаємо внаслідок інтегрування додаткової системи рівнянь першої варіації.

Для визначення матриці  $Q$  розпишемо вектор часових функцій

$$Z(t) = [U_1 - R_1 I_1, -u_C - R_2 i_2, i_2]^T, \quad (29)$$

Матриця коефіцієнтів варіаційних рівнянь  $Q$  визначається як часткова похідна від вектора часових функцій

$$Q = \frac{\partial Z(t)}{\partial Y} = \left[ \frac{\partial U_1}{\partial Y} - R_1 \frac{\partial I_1}{\partial Y}, -\frac{\partial u_C}{\partial Y} - R_2 \frac{\partial i_2}{\partial Y}, \frac{\partial i_2}{\partial Y} \right]^T, \quad Z(t) = \frac{dY}{dt}. \quad (30)$$

Визначимо часткові похідні виразу (30). Для цього рівняння (24), (25), (10) у вигляді

$$\frac{dI_1}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 & 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{dY}{dt}, \quad \frac{di_2}{dt} = [A_2 \quad 0] \frac{dY}{dt}, \quad \frac{du_C}{dt} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad C^{-1}] \frac{dY}{dt}. \quad (32)$$

Отримані рівняння дають можливість визначити необхідні часткові похідні, а саме

$$\frac{\partial I_1}{\partial Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 & 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial i_2}{\partial Y} = [A_2 \quad 0], \quad \frac{\partial u_C}{\partial Y} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad C^{-1}] \quad (33)$$

Оскільки вхідна напруга не залежить від вектора  $Y$ , часткова похідна  $\partial U_1 / \partial Y$  буде нульовою матрицею, що містить 5 стовпців і 3 рядки.

Підставивши (34) – (36) в (30), отримаємо вираз для обчислення матриці  $Q$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ -R_1 A_1 & 0 \\ 0 \\ -R_2 A_2 & -C^{-1} \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Початкове наближення  $X(0)^{(0)}$  задаємо довільно, а початкові умови  $S(0)^{(K)}$  повинні неухильно задовольняти умову

$$S(0)^{(K)} = (B(0)^{(K)})^{-1}. \quad (38)$$

### Аналіз результатів розрахунку

На рис. 2–4 наведено розрахункові криві усталених значень змінних стану на інтервалі одного періоду  $T=0.02$  с. Розрахунки виконувалися за таких параметрів потроювача частоти:

$$r_{1A} = r_{1B} = r_{1C} = 1.1 \text{ Ом}; \quad r_{2A} = r_{2B} = r_{2C} = 2.0 \text{ Ом}; \quad r_H = 15 \text{ Ом};$$

$$\alpha_{1A} = \alpha_{1B} = \alpha_{1C} = 172 \text{ Гн}^{-1}; \quad \alpha_{2A} = \alpha_{2B} = \alpha_{2C} = 203 \text{ Гн}^{-1}; \quad C = 50 \text{ мкФ}, \quad u_m = 311 \text{ В}.$$

Крива намотнення апроксимована виразом:

$$\varphi(\psi) = \begin{cases} a_1 \psi, & |\psi| > \psi_1, \\ S_3(\psi), & \psi_1 \leq |\psi| \leq \psi_2, \\ a_2 \psi - a_0, & |\psi| > \psi_2 \end{cases}$$

де  $a_1 = 1.0 \text{ Гн}^{-1}$ ;  $a_2 = 84.0 \text{ Гн}^{-1}$ ;  $a_0 = 59.0 \text{ А}$ ;  $\psi_1 = 0.1 \text{ Вб}$ ;  $\psi_2 = 1.0 \text{ Вб}$ ;  $\varphi(\psi_1) = 0.1 \text{ А}$ ;  $\varphi(\psi_2) = 25.0 \text{ А}$ ;  $S_3(\psi)$  – кубічний сплайн. Зауважимо, що  $\alpha''(\psi_1) = a_1$ ,  $\alpha''(\psi_2) = a_2$ .

На рис. 2 наведено криві усталеного процесу струму первинної обмотки трансформатора для фаз *A*, *B*, *C* на інтервалі одного періоду напруги живлення  $T=0.02$  с. Амплітуди струмів фаз не перевищують 18 А, однакові і зміщені на  $120^\circ$ . Отримані залежності свідчать про нелінійний характер цих кривих, що є наслідком глибокого насичення осердя трансформатора.

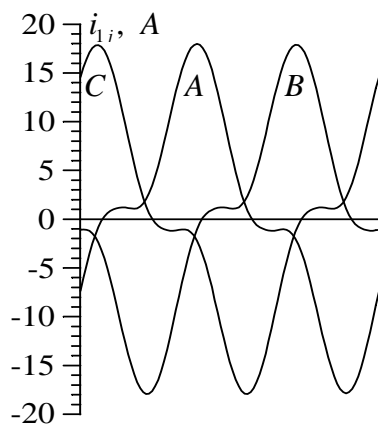


Рис. 2. Усталені значення струмів фаз первинної обмотки трансформатора на інтервалі одного періоду

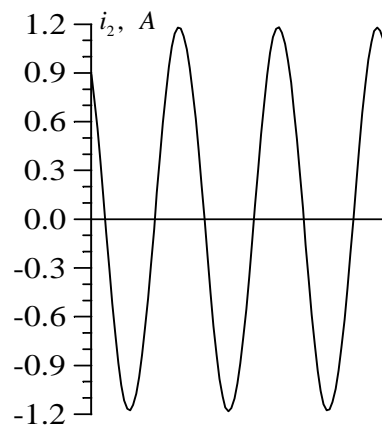


Рис. 3. Усталені значення струму вторинної обмотки трансформатора на інтервалі одного періоду

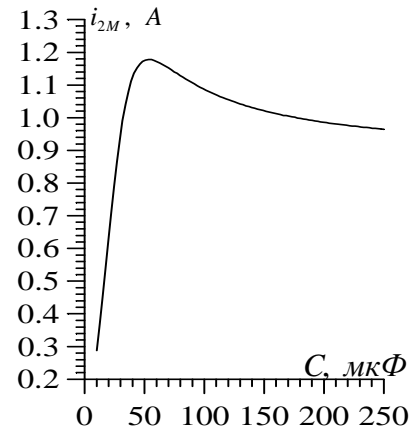


Рис. 4. Залежність амплітуди струму вторинної, обмотки трансформатора від ємності

На рис. 3 наведено криву усталеного значення струму навантаження на інтервалі одного періоду вхідної напруги. Крива має синусоїдальну залежність потроєної частоти, тобто 150 Гц. Амплітуда цього струму приблизно дорівнює 1.2 А. На рис. 4 наведено залежність амплітуди струму навантаження від значення ємності конденсатора навантаження. З рисунка видно, що в феромагнетному потроювачі частоти має місце резонанс струму навантаження (1.18 А) при значенні ємності навантаження  $\approx 53$  мкФ. Причому із зменшенням ємності амплітуда струму навантаження різко падає. Натомість із її збільшенням вона теж падає, але значно повільніше.

### Висновок

Розроблено нелінійну математичну модель феромагнетного потроювача частоти на базі трифазного трансформатора, яка ґрунтується на явних методах числового інтегрування систем диференціальних рівнянь. Рівняння динаміки записані відносно змінних стану в нормальній формі Коші, що значно спрощує використання явних методів. Розроблено методіку аналізу усталених режимів роботи потроювача, що ґрунтується на моделі чутливостей до початкових умов. Вона дає можливість підвищити точність обчислень і зменшити їх обсяг, проте вимагає додаткової пам'яті для варіаційних рівнянь.

1. Баранов В.Л. Дифференциально-тейлоровская модель нелинейных краевых задач // Электронное моделирование.—2000.—№ 4.—С. 25 — 31. 2. Бондаренко В.М., Абидов С.Т. Дискретные методы нелинейных трансформаторов и их программная реализация на ЭВМ. — К., 1987. — Препринт — 518 // ИЭД АН УССР. 3. Глухивский Л. И. Расчет периодических процессов электротехнических устройств. — Львов: Вища школа, 1984. — 164 с. 4. Чабан В.И., Самотый В.В. Применение экстраполяционного метода в задачах ускоренного поиска стационарных процессов электромагнитных устройств // Изв. вузов. Электромеханика. — 1987.— № 8. — С. 13 — 17. 5. Шидловська Н.А. Про деякі задачі нелінійної електротехніки і математичні методи їх дослідження. // Техн. електродинаміка. — 2008. — №5 — С. 3–11. 6. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭПВМ. — Киев: Наукова думка, 1966. — 147 с. 7. Samotyj V., Shaky S. Mathematical Model of Frequency Multiplier "Symmetric Scheme of Rectification with Voltage Doubling – Bridge Parallel Thyristor Chopper" // Technology (Journal of Engineering). – Kathmandu, 2000. – V. 9. – P. 58 – 62.