

Ю.Ф. Ткаченко, М.Р. Іващенко

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

ПРО ДЕЯКІ ІМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ВИМІРІВ

© Ткаченко Ю.Ф., Іващенко М.Р., 2008

Розглянуті імовірнісні моделі випадкових, грубих помилок та їх композицій. Виведені формули розподілів і числових характеристик для відповідних моделей.

It is based on the mixed probability model of the distribution accidental and gross errors. The system of tolerances mentioned above allows to design and to make measurements with the highest reliability.

Постановка проблеми. Проблема контролю вимірювального матеріалу від впливу грубих і систематичних помилок вимагає розробки математичних моделей, якими можна описувати сумісну дію випадкових, грубих і систематичних помилок. Найпоширенішою імовірнісною моделлю випадкових помилок є нормальний закон розподілу. Для аномальних результатів поширеною моделлю також є нормальний закон, але з іншими параметрами, ніж у випадкових помилок. У цій роботі запропоновані змішані імовірнісні моделі випадкових і грубих помилок, використання яких дає змогу обґрунтованіше розглядати питання урівнювання, призначення допусків та визначення надійності вимірів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Нагромаджений за останні десятиліття досвід розроблення нових методів обробки інформації свідчить про необхідність вдосконалення алгоритмів оброблення, підвищення стійкості критеріїв якості і надійності їх функціонування, що вимагає розроблення і перевірки на практиці нових імовірнісних моделей, якими можна подавати реальні вимірювальні дані.

Формування цілей роботи. У роботі наведені найважливіші імовірнісні моделі випадкових величин, які надалі використані для опису випадкових і грубих помилок, а також їх сумісної дії.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо імовірнісні моделі випадкових величин, якими можна описувати випадкові і грубі помилки.

1. Усічений розподіл

Найпоширенішою моделлю випадкових помилок є нормальний закон. Відомо, що, якщо на випадкову величину під час вимірювань накладається обмеження вигляду $a < x < b$, то існує імовірнісна модель усіченого розподілу:

$$f_y(x) = \begin{cases} cf(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b), \end{cases}$$

де $c^{-1} = F(b) - F(a)$; $f(x)$, $F(x)$ – відповідно щільність і функція розподілу.

Якщо прийняти для вихідних випадкових помилок математичне сподівання $M(x)=0$ і дисперсія $D(x) = \sigma^2$, то для усічених випадкових помилок η відповідні числові характеристики дорівнюють

$$M(\eta) = 0, \quad D(\eta) = \sigma^2 \left[1 - \frac{tj(t)}{\Phi_0(t)} \right] = a\sigma^2, \quad a \leq 1,$$

де $t=x/\sigma$, $j(t) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}$, $\Phi_0(t)$ – функція Лапласа. У таблиці наведені коефіцієнти a

усічення дисперсії для значень параметра t в інтервалі (2–3), які можна використовувати для корекції середніх квадратичних помилок.

Значення коефіцієнта a усічення дисперсії

t	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
a	0.88	0.92	0.94	0.96	0.98	0.99

2. Рівномірний розподіл

Коли апріорної інформації про розподіл помилок вимірювань недостатньо, можливе використання імовірнісної моделі рівномірного розподілу. Відомо, що розподіл суми незалежних величин з рівномірного розподілу близьке до нормального вже при $n=3$.

Рівномірним розподілом зручно зображати грубі помилки, якщо вважати, що вони мають такі властивості:

- значення грубих помилок рівноімовірні;
- додатні і від’ємні грубі помилки рівноімовірні.

Друга властивість приводить до моделі подвійного рівномірного розподілу.

Для випадкових величин, які мають рівномірний розподіл в інтервалі (a, b) , щільність і числові характеристики дорівнюють

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}, \quad (1)$$

$$M(x) = \frac{a+b}{2}; \quad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3. Подвійний рівномірний розподіл

Якщо ввести обмеження на величину помилки вигляду $|x| > t_2 S$, то можлива така імовірнісна модель двобічних грубих помилок – подвійний рівномірний розподіл.

$$f_2(x) = \begin{cases} [2(b-a)]^{-1}, & x \in (-b, -a); \\ [2(b-a)]^{-1}, & x \in (a, b); \\ 0, & x \notin \{(-b, -a), (a, b)\}; \end{cases} \quad (2)$$

$$M(x) = 0, \quad D(x) = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2),$$

де $a=t_1 S$, $b=t_2 S$. Перевагою цієї моделі є те, що середня частина вибірки – інтервал $(-a, a)$ відводиться для випадкових помилок.

4. Дельта-функція

Введемо поняття одиничної функції (функції Хевісайда)

$$e(x-t) = \begin{cases} 1, & x \geq t \\ 0, & x < t \end{cases}$$

Дельта-функція $d(x-t)$ є похідною одиничної функції

$$d(x-t) = \frac{de(x-t)}{dx}.$$

Припустимо, що $\xi = k\sigma$ – однобічна груба помилка (k – кратність грубої помилки). Тоді імовірнісну модель для неї можна задати щільністю

$$f_3(x) = d(x-kS). \quad (3)$$

Для двобічної грубої помилки $x = \pm kS$, знак якої випадковий, відповідно щільність дорівнюватиме

$$f_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}d(x-kS), & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}d(x+kS), & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Подання грубої помилки або параметра зсуву за допомогою δ -функції можливо в композиції з випадковими величинами, які мають нормальний, рівномірний або інший неперервний розподіл.

Для визначення сумісної дії випадкових і грубих помилок з'єднують мішані імовірнісні моделі, які можна отримати через композицію законів розподілу випадкових і грубих помилок. Розглянемо деякі типові змішані моделі.

1. Композиція η випадкової ξ і однобічної грубої помилки дискретного типу ξ_1

$$h_1 = x + x_1,$$

де $f_x(x) = (S\sqrt{2p})^{-1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2S^2}\right\}$; $f_{x_1}(x) = d(x-kS)$.

За теоремою згортки

$$\begin{aligned} f_{h_1}(x) &= (f_x * d(x-kS)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)d(x-kS-t)dt = f_x(x-kS) = (S\sqrt{2p})^{-1} \exp\left\{-\frac{(x-kS)^2}{2S^2}\right\} \end{aligned} \quad (5)$$

2. Композиція η_2 випадкової ξ і двобічної грубої помилки дискретного типу ξ_2

$$h_2 = x + x_2,$$

де $f_{x_2} = \frac{1}{2}d(x \pm kS)$.

За теоремою згортки маємо

при $x < 0$,

$$f_{h_2}(x) = \left(f_x * \frac{1}{2}d_{-k}\right)(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)d(x+kS-t)dt = \frac{1}{2}(S\sqrt{2p})^{-1} \exp\left\{-\frac{(x+kS)^2}{2S^2}\right\},$$

при $x > 0$,

$$f_{h_2}(x) = \left(f_x * \frac{1}{2}d_k\right)(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)d(x-kS-t)dt = \frac{1}{2}(S\sqrt{2p})^{-1} \exp\left\{-\frac{(x-kS)^2}{2S^2}\right\}.$$

Тобто щільність випадкової величини h_2 дорівнює

$$f_{h_2}(x) = \begin{cases} \frac{c}{2} \cdot f_x(x+kS), & x \leq 0 \\ \frac{c}{2} \cdot f_x(x-kS), & x > 0 \end{cases} \quad (6)$$

Постійну c одержимо за умовою нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_h(x) dx = 1,$$

звідки $c = \frac{1}{[\Phi_0(k) + 0,5]}$.

Остаточно отримуємо, що одна змішана модель описується щільністю (6).

3. Знайдемо композицію випадкової ξ і грубої помилки неперервного типу ξ_3

$$h_3 = x + x_3,$$

де $f_{x_3}(x)$ задається формулою (2).

Далі маємо

при $x < 0$,

$$f_{h_3}^-(x) = (f_x \cdot f_{x_3}^-)(x) = \frac{1}{2(b-a)} \int_{-b}^{-a} f_x(x+t) dt = \frac{1}{2(b-a)} \left[\Phi_0\left(\frac{x+b}{s}\right) - \Phi_0\left(\frac{x+a}{s}\right) \right];$$

при $x > 0$,

$$f_{h_3}^+(x) = (f_x \cdot f_{x_3}^+)(x) = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b f_x(x-t) dt = \frac{1}{2(b-a)} \left[\Phi_0\left(\frac{x-a}{s}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-b}{s}\right) \right].$$

У результаті отримаємо, що сума випадкової і двобічної грубої помилки неперервного типу описується щільністю

$$f_{x_3}(x) = \begin{cases} cf_{h_3}^-(x), & x \leq 0 \\ cf_{h_3}^+(x), & x > 0. \end{cases} \quad (7)$$

де $c^{-1} = \frac{1}{(b-a)} \int_0^{\infty} \left[\Phi_0\left(\frac{x-a}{s}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-b}{s}\right) \right] dx$.

4. Для моделі суми η_4 випадкової ξ і грубої помилки ξ_4 , яка має рівномірний розподіл (1)

$$h_4 = x + x_4,$$

виконавши аномальні перетворення, отримаємо

$$f_{h_4} = \frac{c}{(b-a)} \left[\Phi_0\left(\frac{x-a}{s}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-b}{s}\right) \right], \quad (8)$$

де константа $c^{-1} = \frac{1}{(b-a)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi_0\left(\frac{x-a}{s}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-b}{s}\right) \right] dx$.

Розподіл (8) при $(b-a) \ll 2\sigma$ можна апроксимувати нормальним розподілом $N(0, s_{h_4}^2)$ з параметрами $M(h_4) = 0$, $D(h_4) = s^2 + \frac{(b-a)^2}{3}$.

Висновки. 1. Запропоновані імовірнісні моделі грубих помилок і їх композицій з випадковими помилками. 2. Виведені аналітичні співвідношення для щільностей і числових характеристик дають можливість кількісно оцінювати надійність вимірювального матеріалу.

1. Вентуель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480 с. 2. Іващенко М.Р., Ткаченко Ю.Ф. Про ефективність деяких критеріїв відбраковки // “Перспективи нарощування та збереження енергетичних ресурсів України” / Збірн. наук. пр. – Івано-Франківськ, 2006. – С. 63–64. 3. Ткаченко Ю.Ф., Іващенко М.Р. Надійність геодезичних вимірів і обґрунтування допусків // “Геодезія, картографія і аерофотознімання” / Укр. міжв. наук.-техн. зб. – Львів, 2007. – С. 143–150.