УДК 517.9

Є.В. ХАРЧЕНКО, М.Б. СОКІЛ

Національний університет "Львівська політехніка"

НЕЛІНІЙНІ ПРОЦЕСИ У СЕРЕДОВИЩАХ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ ПОЗДОВЖНІМ РУХОМ, І ВПЛИВ СПОСОБУ ЗАКРІПЛЕННЯ НА ЇХ КОЛИВАННЯ

Досліджується вплив способу закріплення (крайових умов) на нелінійні коливання одного класу рухомих одновимірних середовищ. В їх основу покладено принцип одночастотності коливань нелінійних систем із багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами; узагальнення методів Д'Аламбера і Ван-дер-Поля на крайові задачі, які описують динамічні процеси розглядуваних середовищ. Останнє дає змогу отримати залежності для визначення закону зміни основних характеристик процесу.

Influence of method of fixing (regional terms) is explored on oscillation of one class of mobile homogeneous environments. In their basis principle is fixed the same thing to frequency of vibrations of the nonlinear systems with many degrees of liberty and generalization of method d'Alembert and Wan der Pol is fixed on regional tasks which describe the dynamic processes of the examined environments. The last allows toget dependences for determination of frequency of wave process, and also number of direct and reverse waves.

Актуальність і постановка задачі. При дослідженні динамічних процесів як лінійних, так і нелінійних систем важливе місце посідає вивчення впливу способу закріплення (крайових умов) на процес, зокрема у найпростіших випадках способи закріплення для коливних систем визначають форми коливань і їх частоту. Такі задачі стосовно лінійних і квазілінійних коливних систем із розподіленими параметрами достатньо для практичних цілей визначені, наприклад, в [1, 2]. Проблема значно ускладнюється у випадку динамічних систем, які характеризуються поздовжнім рухом (поперечні чи поздовжні коливання каната, линви, струни, пасових передач, які рухаються вздовж своєї недеформованої осі). Для одновимірних систем вказані задачі за малих швидкостей їх руху розглядались в [3], а в [4, 5] – для довільних швидкостей поздовжнього руху за найпростіших однорідних чи квазіоднорідних крайових умов. Предметом розгляду цієї роботи є розроблення аналітичного методу дослідження одночастотних коливань одновимірних систем із розподіленими параметрами, які характеризуються довільною швидкістю поздовжнього руху і більш загальним виглядом крайових умов. Дослідження побудовані на базі: а) розвитку методу Д'Аламбера для рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу, які містять змішану похідну лінійної і часової змінних; б) узагальнення методу Ван-дер-Поля на один клас нелінійних рівнянь з частинними похідними та методу усереднення для звичайних диференціальних рівнянь зі швидкозмінною фазою.

Отже, предметом розгляду роботи є динамічні процеси в одновимірних системах, рух яких описується диференціальним рівнянням

$$u_{tt} + 2Vu_{tx} - \alpha^2 u_{xx} = \varepsilon f(u, u_x, u_t) \tag{1}$$

за крайових умов

$$\left[\alpha_1 u_x(x,t) + \beta_1 u(x,t)\right]\Big|_{x=0} = 0\,,$$
$$\left[\alpha_2 u_x(x,t) + \beta_2 u(x,t)\right]\Big|_{x=l} = 0\,. \tag{2}$$

У співвідношеннях (1), (2) α, β, α_1, α_2 β_1, β_2, ε – сталі (ε – малий параметр); $f(u, u_x, u_t)$ – аналітична функція.

Методика дослідження. Побудувати точний розв'я зок крайової задачі (1), (2), який давав би можливість проаналізувати вплив тих чи інших параметрів на динамічний процес, залишається завданням проблематичним. Тому подальшою метою роботи є побудова наближеного розв'язку розглядуваної крайової задачі і отримання аналітичних залежностей, які достатньо точно описують процес у системі.

Беручи до уваги, що максимальне значення правої частини рівняння (1) є малою величиною (ε – малий параметр), для побудови наближеного його розв'язку використаємо основну ідею методів збурень [6] чи їх модифікацій [1, 2]. Відповідно до цих методів першочергово необхідно знайти розв'язок незбуреної ($\varepsilon = 0$) крайової задачі.

Незбурена задача. Дослідимо коливний процес системи, який описується незбуреним рівнянням (1), тобто рівнянням

$$u_{tt} + 2Vu_{tx} - \alpha^2 u_{xx} = 0 \tag{3}$$

за крайових умов (2).

Отримати розв'язок рівняння (1) за крайових умов (2), користуючись відомими класичними методами, не вдається, тому що, як і в [4, 5], в основу побудови розв'язку крайової задачі (3), (2) покладено припущення, що процес у відповідній динамічній системі подається у вигляді накладання двох хвиль косинусоїдальної форми різних довжин, але однакової частоти. Отже, одночастотний розв'язок розглядуваної крайової задачі шукатимемо у вигляді

$$u(x,t) = C_1 \cos(\kappa x + \omega t + \varphi) + C_2 \cos(\chi x - \omega t + \psi), \tag{4}$$

де κ, χ – хвильові числа прямої і відбитої хвиль; C_1, C_2 – їх амплітуди; φ, ψ – початкові фази прямої і відбитої хвиль; ω – частота хвилі.

Співвідношення (4) буде розв'язком рівняння (1), якщо хвильові числа та частота процесу задовольняють дисперсійним співвідношенням

$$\alpha^2\kappa^2 - \omega^2 - 2\beta\kappa\omega = 0,$$
$$\alpha^2\chi^2 - \omega^2 + 2\beta\chi\omega = 0. \tag{5}$$

Задовольняючи крайові умови (2) із представлення розв'язку рівняння у вигляді (4), отримаємо систему рівнянь, яка зв'язує амплітуди, фази, хвильові числа і частоту процесу із параметрами крайових умов – $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$:

$$C_1(\alpha_1\kappa \sin\varphi + \beta_1 \sin\varphi) - C_2(\alpha_1\chi \sin\psi - \beta_1 \cos\psi) = 0;$$
$$C_1(\alpha_1\kappa \sin\varphi - \beta_1 \cos\varphi) - C_2(\alpha_1\chi \cos\psi + \beta_1 \sin\psi) = 0; \tag{6}$$

$$C_1(\beta_2 \cos(\kappa l + \varphi) - \alpha_2\kappa \sin(\kappa l + \varphi)) + C_2(\beta_2 \cos(\chi l + \psi) - \alpha_2\chi \sin(\chi l + \psi)) = 0;$$
$$C_1(\beta_2 \sin(\kappa l + \varphi) + \alpha_2\kappa \cos(\kappa l + \varphi)) - C_2(\beta_2 \sin(\chi l + \psi) + \alpha_2\chi \cos(\chi l + \psi)) = 0. \tag{7}$$

Система алгебраїчних рівнянь (6) має відмінний від тривіального розв'язок у тому випадку, якщо початкові фази φ і ψ пов'язані співвідношенням

$$tg(\varphi + \psi) = \frac{\beta_1^2 - \alpha_1^2\kappa\chi}{\alpha_1\beta_1(\kappa + \chi)}. \tag{8}$$

Аналогічно, система рівнянь (7) має відмінний від тривіального розв'язок у випадку, якщо

$$tg((\chi + \kappa)l + \varphi + \psi) = \frac{\alpha_2\beta_2(\kappa + \chi)}{\alpha_2\kappa\chi - \beta_2^2}. \tag{9}$$

Співвідношення (8), (9) пов'язують хвильові числа κ і χ із параметрами крайових умов у вигляді

$$tg(\chi+\kappa)l=\frac{\alpha_2\beta_2\alpha_1\beta_1(\kappa+\chi)^2+(\alpha_1\kappa\chi-\beta_1^2)(\alpha_2\kappa\chi-\beta_2^2)}{(\kappa+\chi)\left[\alpha_1\beta_1(\alpha_2\kappa\chi-\beta_2^2)-\alpha_2\beta_2(\alpha_1\kappa\chi-\beta_1^2)\right]}. \qquad (10)$$

Отже, дисперсійні співвідношення (5) та залежність (10) слугують для однозначного визначення хвильових чисел κ і χ та частоти коливань ω.

Збурена задача. Отримавши розв'язок незбуреної крайової задачі, перейдемо до визначення впливу нелінійних сил на коливний процес системи. Для цього перейдемо до розгляду збуреного рівняння (1). В основу побудови розв'язку збуреної крайової задачі (1)–(3) покладемо припущення, що процес у відповідній динамічній системі подається у вигляді накладання двох хвиль різних довжин із змінними в часі амплітудами, проте частоти хвиль однакові і близькі до частоти незбуреної системи. Останнє, а також умови сумісності систем рівнянь (6) і (7) дають змогу, відповідно до методу Ван-дер-Поля [7], трактувати співвідношення

$$u=a\left[\cos(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right], \qquad (11)$$

в якому параметри a і γ невідомої функції незалежної змінної t є розв'язком збуреного рівняння (1). Параметр δ у залежності (11) є сталим і вказує на те, що амплітуди прямої і відбитої хвиль різні. Диференціюючи (11) за часом, з врахуванням останнього, отримаємо

$$u_t=-\dot a\left[\cos(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right]-\dot\varphi_0 a\left[\sin(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)-\delta\sin(\chi x-\omega t+\psi+\gamma)\right]-$$
$$-a\omega\left[\sin(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)-\delta\sin(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right]. \qquad (12)$$

Беручи до уваги, що для незбуреного рівняння

$$u_t=-a\omega\left[\sin(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)-\delta\sin(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right], \qquad (13)$$

отримаємо із (11) і (13) перше звичайне диференціальне рівняння, яке зв'язує невідомі параметри $\dot a$ і $\dot\gamma$:

$$\dot a\left[\cos(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right]-\dot\gamma a\left[\sin(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)-\delta\sin(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right]=0. \qquad (14)$$

Наступним диференціюванням за незалежними змінними залежності (13) знаходимо

$$u_{tt}=-\dot a\omega\left[\sin(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)-\delta\sin(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right]-\dot\varphi_0 a\omega\left[\cos(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right]-$$
$$-a\omega^2\left[\cos(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right];$$
$$u_{tx}=-a\omega\left[\kappa\cos(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)-\chi\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right]$$

і відповідно

$$u_{xx}=-a\left[\kappa^2\cos(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)+\chi^2\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right].$$

Співвідношення (11) буде розв'язком диференціального рівняння (1), якщо після підстановки в нього отриманих виразів матиме місце залежність

$$\dot a\left[\sin(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)-\delta\sin(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right]-\dot\gamma a\left[\cos(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right]=\varepsilon\bar f\left(a,x,\varphi,\psi,\gamma\right), \qquad (15)$$

де $\bar f\left(a,x,\varphi,\psi,\gamma\right)$ відповідає значенню функції $f(u,u_x,u_t)$ за умови, що u,u_x,u_t приймають наведені вище значення.

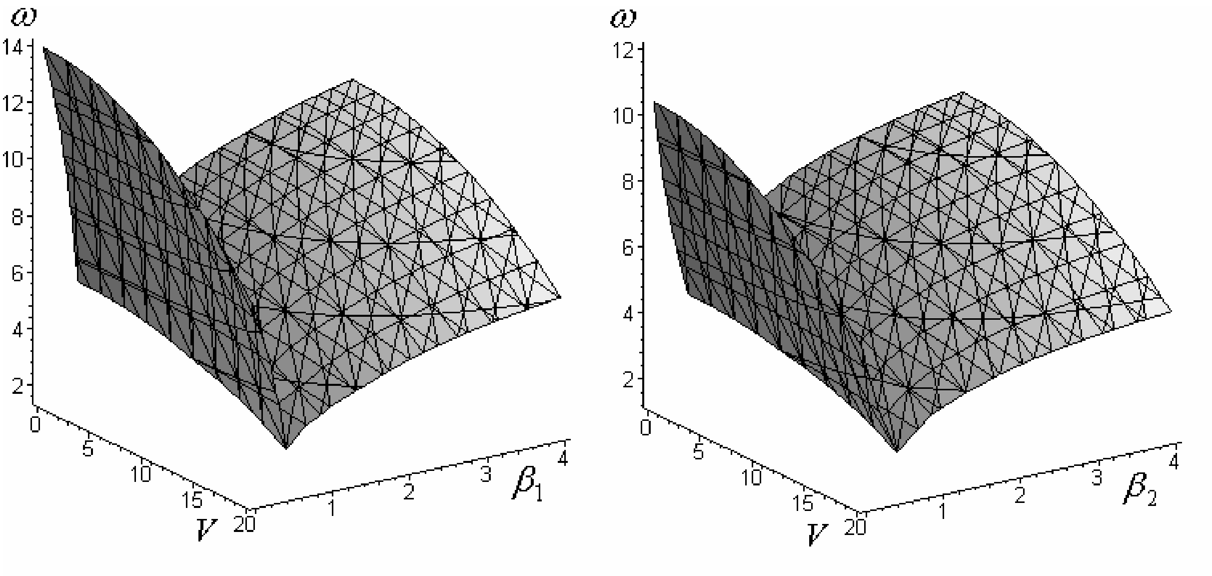
Система рівнянь (14), (15) визначає невідомі параметри $\dot a$ і $\dot\gamma$ у вигляді

$$\dot a=-\frac{\varepsilon\bar f\left(a,x,\varphi,\psi,\gamma\right)}{\omega\left(1+\delta^2+2\delta\cos\left(\kappa x+\chi x+\varphi+\psi\right)\right)}\left[\sin(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)-\delta\sin(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right];$$

$$\dot\gamma=-\frac{\varepsilon\bar f\left(a,x,\varphi,\psi,\gamma\right)}{a\omega\left(1+\delta^2+2\delta\cos\left(\kappa x+\chi x+\varphi+\psi\right)\right)}\left[\cos(\kappa x+\omega t+\varphi+\gamma)+\delta\cos(\chi x-\omega t+\psi-\gamma)\right], \qquad (16)$$

і її після усереднення можна привести до стандартного вигляду.

Залежність першої основної частоти від параметрів V і β_1 та V і β_2 показано на рис. а, б за $\alpha^2 = 1000 - V^2$, $\alpha_1 = -2.5, \alpha_2 = 1.25$, $l = 1$.



а *б*

Із отриманих результатів випливає: а) із зростанням швидкості руху середовища частота власних коливань його зменшується; б) за зростання параметрів β_1 і β_2 ($\alpha_1, \alpha_2 - const$) частота власних коливань спочатку зменшується, а потім зростає; в) якщо $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0$, то зі збільшенням β_2 частота власних коливань зростає, а у випадку $\alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0, \beta_1 > 0$ частота власних коливань зменшується, якщо ж $\alpha_1 = 0$, то незалежно від знака інших параметрів частота збільшується зі збільшенням β_2; г) $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0$ – частота власних коливань спочатку зменшується, а потім зростає

Слід зауважити, як окремий випадок із викладеного (за $V = 0$), отримують результати, які стосуються динамічних процесів систем, які не рухаються вздовж своєї осі, а саму методику можна узагальнити на випадок неавтономних систем.

1. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с. 2. Мосеенков Б.И. Методика построения и структура асимптотических приближений решений нелинейных смешанных краевых задач при исследовании многочастотных режимов колебаний // Мат. физика. – 1972. – №11. – С.83–98. 3. Боженко М.В., Сліпчук А.М. Вплив поздовжнього руху на нелінійні коливанння пружних одновимірних систем // Вісник НУ "Львівська політехніка" "Динаміка, міцність та проектування машин і приладів". – 2004. – № 509. – С.25–28. 4. Харченко Є.В., Сокіл М.Б. Коливання рухомих нелінійно-пружних середовищ і асимптотичний метод в їх дослідженні // Науковий вісник: Зб. наук.-техн. пр. – Львів: НЛТУ, 2001 – Вип. 16. – С.134–138. 5. Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б. Хвильві процеси в однорідних нелінійно-пружних одновимірних системах і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів: УкрДЛТУ, 2003. – Вип. 28. – С.81–89. 6. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976.. – 456 с. 7. Wan der Pol. A Teory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations//Radio Review. –1920. – №1.