УДК 621.01

Б.М. ДІВЕЄВ

Національний університет "Львівська політехніка"

РАЦІОНАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У СКЛАДНИХ КОНСТРУКЦІЯХ

В багатьох загальних структурах є області, для яких застосовуються моделі пониженого порядку такі, як теорії балки, вала, пластини, оболонки, що ґрунтуються на фізичних параметрах. Подано нове застосування дискретно-континуальних числових схем для еластодинамічного аналізу для таких об'єктів.

Within many common structures there are regions in wich redused-order models such as beam, rod, plate, and shell theories are appropriate based on the physical parameters. A novel application of a discrete-continuous numerical schemes to elastodynamic analysis for such objects is presented herein.

Вступ. У цій роботі розглянуто окремі варіанти моделювання та раціонального керування силовими вібраційними потоками у складних конструкціях. Відомо багато способів моделювання таких об'єктів, кожна модель допускає багато способів числової реалізації, а кожен із способів числової реалізації може бути сотні разів повторений під час раціонального проектування конструкції. Тут розглядається деякий простий спосіб наскрізного паралельного проходження цих етапів з істотною знижкою обсягів обчислень. Особлива увага приділена вузлам з'єднань елементів.

Постановка проблеми. В інженерній практиці завжди була важливою проблема міцності з'єднань вузлів конструкцій. Особливої уваги вимагають динамічні навантаження. Руйнування здебільшого відбувається внаслідок втомних напружень. Важливо також дослідити пікові навантаження в з'єднаннях, що виникають під час віброударних навантажень. Ці завдання привертали увагу багатьох дослідників.

Під час розрахунку динаміки складних конструкцій виникають такі завдання: 1) визначення зовнішніх навантажень; 2) визначення внутрішніх сил; 3) визначення напружень. Особливо актуальним є завдання 4) – оптимальне проектування таких конструкцій.

Огляд літературних джерел. Для розрахунку напружено-деформованого стану тіл складної форми широко застосовуються моделі пониженого порядку – балки, пластинки, оболонки. Перевага цих моделей у меншому числі ступенів вільності, що збільшує швидкість та спрощує обчислення. Проте в таких дослідженнях виникає трудність спряження схем різнорідних елементів, наприклад, балки з пластиною, чи пластин оболонок різної товщини чи структури. Для моделювання з'єднань такого типу, зокрема балок з тривимірним пружним тілом, розроблено багато методик. Для цього застосовують методи, зокрема в скінченно елементних методах моделювання. У [1, 2, 3] немає можливості варіації напружено-деформованого стану по товщині балочного елемента. В тривимірному аналізі цього методу [4] наявні ці самі обмеження. Розглядалися і суперелементні підходи, що ґрунтуються на безпосередньому жорсткому кінематичному включенні балочного елемента в розрахункову схему. Доволі значна кількість робіт розглядає застосування методу множників Лагранжа для з'єднання різнорідних розрахункових структур [5, 7].

Визначення напружено-деформованого стану з'єднань шаруватих елементів конструкцій вимагає розгляду багатьох питань, зокрема питання моделювання тонкостінних шаруватих елементів, моделювання динамічних напружень в складних конструкціях, впливу різноманітних фізичних полів та стан з'єднання. Ці задачі тісно пов'язані з розробкою ефективних числових алгоритмів розв'язку систем рівнянь в частинних похідних, що описують вібраційні та дифузійні процеси в неоднорідних матеріалах. Сьогодні відомо багато методів розрахунку тонкостінних елементів конструкцій, огляд яких наведено в [8–11]. Розроблено низку уточнених розрахункових схем для тонкостінних шаруватих елементів, що охоплюють доволі широкий спектр фізичних, хімічних та механічних явищ, пов'язаних з процесом їх виготовлення та експлуатації. Проте універсальних методів розрахунку шаруватих елементів конструкцій за різноманітних видів впливів не існує. Це зумовлено тим, що самі ці елементи за своїм структурним виконанням дуже різноманітні. Разом з тим останнім часом все більшу увагу дослідників привертають проблеми побудови уточнених розрахункових схем для дослідження явищ концентрації напружень на краях та в місцях з'єднань шаруватих елементів конструкцій. Це пов'язано з тим, що, як правило, там спостерігаються найбільші значення напружень та їх градієнтів. Найбільші там і значення таких скалярних параметрів, як температура чи концентрація дифундуючої домішки. Особливо гостро стоїть проблема розрахунку та оптимального проектування з'єднань композит-метал, чи композит-композит. Значні зусилля на розроблення уточнених розрахункових схем з'єднань шаруватих елементів були спрямовані в НАСА після аварії Челенджера, причиною якої, за висновками експертів, стала саме недосконалість з'єднання.

Варто зазначити, що поряд зі складними моделями, не втрачають практичного значення і прості розрахункові схеми, розроблені ще в минулому чи на початку нашого століття. Це відома теорія оболонок Кірхгофа–Лява, яка і досі широко використовується в спеціалізованих пакетах програм для інженерних розрахунків. Особливо великого поширення здобула модель Тимошенка для визначення напружено-деформованого стану тонкостінних елементів [11–13]. Це пов'язано з її відносною простотою та можливістю застосування до податливих на зсув матеріалів. Разом з тим слід врахувати, що шаруваті елементи не існують ізольовано, а виступають як елементи в складних конструкціях. Для визначення динамічних характеристик таких конструкцій розроблено багато дискретних, континуальних та дискретно-континуальних схем [14–15]. Постає питання раціонального вибору порядку складності моделі. Значна увага зосереджена на розробленні числових методів для такого роду задач. Це – метод скінченних елементів, метод граничних елементів, деякі комбіновані методи. Крім того, з математичної точки зору в загальній тривимірній постановці задачі такого типу доволі складні, особливо, коли потрібно врахувати ще й складність моделювання окремого шаруватого елемента. Усе це говорить про те, що розроблення уточнених розрахункових схем для дослідження напружено-деформованого стану шаруватих елементів конструкцій має не лише прикладне, але і теоретичне значення.

Зазначимо, що визначення напружень в з'єднаннях елементів тісно пов'язане з розрахунковими схемами конструкції, що містять ці елементи. Відомо багато методів декомпозиції та синтезу конструкцій. Сьогодні можна умовно виділити такі три великі групи цих методів: метод передавальних матриць [16], метод модельного синтезу [17], статистичний енергетичний аналіз. Ці методи поширено застосовуються у різних типах вібронавантажених конструкцій. Відзначимо також аналітичні методи дослідження дискретно-континуальних систем [18, 19]. Останні, на жаль, ще не достатньо апробовані в інженерній практиці.

Для складних систем, що складаються з послідовно з'єднаних елементів довільної структури, найбільше підходять матричні методи. Широке розповсюдження здобула матрична форма методу динамічних жорсткостей та методу початкових параметрів. Ці алгоритми викладені у [20]. Найбільш поширено ці алгоритми використовуються для стрижневих систем. Але їх застосовують і для розрахунку систем, що містять кільцеві пластини [20], ділянки замкнутих циліндричних або конічних оболонок, виділених перерізами перпендикулярної осі, а також інші елементи, для яких можна визначити коефіцієнти є будь-якої передавальної матриці. Найпростіше спряження можна здійснити для елементів, що є подібні (наприклад, дві балки) та описуються однаковою кількістю параметрів (наприклад, згин балок).

У [20] як альтернативний до методу передавальних матриць розглядається метод скінченних елементів. Дещо інакша класифікація в американських джерелах, де альтернативними виступають метод модального аналізу (якому присвячене періодичне видання The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis) та метод статистичного енергетичного аналізу (SEA), що значно менше застосовується. На основі методу модального аналізу розроблено багато прикладних пакетів розрахунку динаміки складних конструкцій, обчислення в яких переважно виконуються на основі методу скінченних елементів.

Незважаючи на постійну увагу багатьох дослідників до цих питань, не можна вважати тему моделювання динаміки складних конструкцій з виділенням з'єднання як концентратора напружень та регулятора вібраційних потоків остаточно вичерпаною як у теоретичному, так і у суто практичному інженерному аспекті. Навіть потужні сучасні програмні засоби типу ANSYS чи COSMOS часто уможливлюють проводити лише розрахунок виділених варіантів конструкцій, а не проводити дослідження у повному обсязі змінних геометричних та механічних параметрів. Запропоновані у цій роботі алгоритми декомпозиції складних конструкцій, з використанням простих малопараметричних класичних конденсованих схем для габаритних елементів конструкцій та адаптивних схем для уточненого розрахунку з'єднань, можуть, як буде показано нижче, з успіхом застосовуватися для моделювання динаміки багатьох конструкцій. Розроблення таких схем та моделей становить самостійний теоретичний інтерес, адже вони не так повно досліджені, як, наприклад, клас тонкостінних елементів, чи клас моделей на основі абсолютно жорстких твердих тіл з пружно-демпфувальними з'єднаннями.

1. Декомпозиція механічної системи. Розглянемо механічну модель конструкції у вигляді набору елементів A_1. Це, звичайно, не початковий етап моделювання. Адже потрібно в якийсь спосіб вибрати ці елементи і розбити на них конструкцію. Історично склалися цілі категорії моделей, часто пов'язаних з деякими конкретними об'єктами, наприклад, мостами, автомобілями, турбогенераторами тощо. Частково вони об'єднані в загальних курсах технічної механіки, окремих монографіях. У зв'язку зі зростанням потужності ЕОМ та розробленням низки спеціалізованих програм (наприклад, скінченно елементних пакетів розрахунку напружень в складних деталях) багато з цих моделей зазнали істотних змін та доповнень. Наприклад, усе ширше застосовуються некласичні моделі тонкостінних елементів. Навіть донедавна некласичні моделі зсувної моделі стрижнів чи оболонок типу Тимошенка стають переважальними. Якщо раніше основний акцент спрямовувався на обчислення, то тепер найбільш важливим стає перший етап моделювання: вибір розрахункової схеми – декомпозиція, моделювання елементів та їх синтез в кінцеву розрахункову схему.

Вважаємо, що множину A елементів A_1 можна розбити на дві: множину E основних елементів A_1^e та множину з'єднань З з елементами A_1^c. Таке розбиття умовне, оскільки елемент першої буде переважно більший за габаритами від елемента другої, та в ньому повніше будуть враховані внутрішні динамічні процеси. Зробимо також деякі апріорні припущення про модель. По-перше, вважаємо що в ній з достатнім ступенем достовірності відображені зовнішні сили, а по-друге, внутрішні сили, чи силові потоки між елементами першої групи. Тут також використовується історичний багаж технічних моделей, але можливе і використання експериментальних даних.

Для множин E, З можна звичним способом побудувати топологічні схеми, матриці інцидентності [21, 22]. Але на першому етапі задамо деякий код кожному компоненту A_1^e, A_1^c моделі. Це – послідовність натуральних чисел:

$$\lambda_1^e = \left(N_1^{e_1}, N_1^{e_2}, ..., N_1^{e_{m_1}} \right), \qquad \lambda_1^c = \left(N_1^{c_1}, N_1^{c_2}, ..., N_1^{c_{m_1}} \right). \tag{1}$$

У загальному випадку це є геометричні, механічні параметри, які об'єднаємо під назвою конструктивні та польові параметри – переміщення, деформації, напруження, температура і теплові потоки, концентрація домішок і їх потоки. Вважаємо скелетну схему моделі, заданою апріорі. Ця скелетна схема включає в себе:

а) повністю топологічну схему з'єднання елементів A_1;

б) типи конструктивних моделей (тобто ті, що використовуються, чи одновимірна стрижнева модель, чи пластина, чи оболонка, чи тривимірне тіло, чи однорідне, чи неоднорідне, чи враховується вплив температури, чи механічні характеристики сталі, чи залежать від рівня завантаженості чи температури, чи деформаційні та температурні поля зв'язані, чи їх можна розділити тощо);

в) місця прикладання векторів та характер збурень і впливів (точки чи ділянки прикладного силового чи кінематичного збурення, агресивний вплив зовнішнього середовища, наприклад, тепло чи волога, характер зміни збурень в часі).

Проведемо диференціацію параметрів для континуальних елементів A_1^e:

$$\lambda_1^{\mathrm{e}} = \left(\lambda_1^{\mathrm{e_p}} \;\middle|\; \lambda_1^{\mathrm{e_k}} \right) = \left(N_{\mathrm{p_i}}^{\mathrm{e_1}}, N_{\mathrm{p_i}}^{\mathrm{e_2}}, \ldots, N_{\mathrm{p_i}}^{\mathrm{i^{e_n}}} \;\middle|\; N_{k_i}^{\mathrm{e_1}}, N_{k_i}^{\mathrm{e_2}}, \ldots. N_{k_i}^{\mathrm{1^{em}}} \right). \tag{2}$$

параметри з індексом (p) – це польові внутрішні параметри, що характеризують континуальні розподіли полів переміщень, концентрацій об'єму A_1^e, а з індексом (k) – параметри, що характеризують контактні та крайові фактори. На відміну від континуальних елементів у вузлових елементах вважаємо присутніми лише параметри з (k), тобто дискретні.

2. Отримання вирішуючих рівнянь. Для отримання вирішуючих рівнянь застосуємо напівдискретну числову схему Гальоркіна. Подамо кінематичні чи концентраційні поля елемента A_1^e у вигляді

$$U_1(X,t) = \sum_{\mathrm{n}}^{N_1} q_{\mathrm{in}}(t)\varphi_{\mathrm{in}}(X). \tag{3}$$

Підставляючи (3) у функціонал, наприклад у функціонал Лагранжа, чи прямо застосовуючи схему Гальоркіна, отримаємо систему звичайних диференційних рівнянь:

$$M_1\ddot{q}_1 + G(q_1) = p_1, \tag{4}$$

де M_1 – матриця мас елемента A_1^e; G – деякий в загальному випадку нелінійний N_1-вимірний функціонал; q_1 – вектор $(q_{11}, q_{12}, \ldots)^T$; p_1 реакції зовнішніх зусиль на віртуальних переміщеннях у вузлових точках елемента A_1^e.

Зробимо такі припущення щодо кінематичних гіпотез (3):

1) відмінні від нуля лише ті p_1, що відповідають (k)-параметрам у дискредитації A_1^e;

2) на першому етапі розрахунку можна обмежитись лише (k)-параметрами.

Останнє означає, що вдається побудувати конденсовані моделі континуальних елементів. Для подовгастих конструкцій це може бути зроблено особливо просто на основі стрижневих моделей, наприклад, на основі моделі балки Тимошенка [23, 24].

Отже, розглянемо скелетну схему конструкції. Подамо впливи та реакції на деякий вузол – елемент A_k^c. Для кожного елемента A_1^e матимемо систему рівнянь (4). Вважаємо, що для кожного вузлового елемента A_1^e маємо таку систему алгебраїчних нелінійних рівнянь:

$$V_1(P_{\mathrm{in}},\quad q_{\mathrm{im}}) = 0\,, \tag{4}$$

де P_{in} – силові фактори; q_{im} – кінематичні у приєднаних до A_1^c континуальних елементах (у нас усі параметри “зовнішні”).

Для замикання системи рівнянь (3), (4) необхідно задати умови спаю. Тут можливі, як було уже сказано, два підходи, спосіб множників Лагранжа та спосіб кінематичних гіпотез [25]. Вважаємо, що нам вдалося так задати кінематичні гіпотези спаю

$$S_1(q_{\mathrm{im}}) = 0\,, \tag{5}$$

що система рівнянь (3)–(5) стає замкнутою. Позначимо її символічно так:

$$R_1(\ddot{q}_{\mathrm{im}}, \dot{q}_{\mathrm{im}}, q_{im}) = 0\,. \tag{6}$$

Формула (6) становить лише першу частину задачі – розрахункову. Вона задає після дискредитації по часу систему алгебраїчних співвідношень на параметри λ_1:

$$|R_1(\lambda) = 0\,. \tag{7}$$

3. Оптимізація. Друга частина – оптимізаційна. Розглянемо ряд критеріїв оптимальності:

$$\min_\lambda \Phi_1(\lambda). \tag{8}$$

Перетворимо систему (7) також на деякий додатний функціонал

$$\Phi_r(|R_1(\lambda)) - 0|\,, \tag{9}$$

та об’єднаємо ці дві задачі в одну задачу багатоцільової оптимізації:

$$\min_\lambda \Phi_1(\lambda),\ \min_\lambda \Phi_2(\lambda),\ldots,\min_\lambda \Phi_N(\lambda),\ \min_\lambda \Phi_1(\lambda). \tag{10}$$

Для розв’язання задачі (10) можна застосовувати методи параметричної багатокритеріальної оптимізації. Перспективним у цьому плані є спосіб генетичної оптимізації. Для цього множина наших параметрів λ_1 перетворюється на двійковий код:

$$(\lambda_1, \lambda_2,\quad, \lambda_1, \ldots) \to (0,1,0,0,0,1,\ldots,). \tag{11}$$

Далі цей код розглядається як деякий набір хромосом і піддається схрещуванню, мутації та виживанню, згідно з критеріями (10). На основі такого ітераційного алгоритму розв’язується в значній мірі задача наростання кількості параметрів. Паралельно з цим способом ефективною є конденсація параметрів у блоки з незначною кількістю зовнішніх параметрів A_1^k та незалежними від них внутрішніми параметрами [24–26]. Це є спосіб визначення застосування спочатку розрахункових схем нижчого порядку, наприклад стрижневих [25], з подальшим уточненням напружень на основі детальнішого описання вузла конструкції. Для деяких конструкцій можна використовувати апріорі оптимізовані секції (наприклад, за міцністю і вагою).

У [18, 23–25] наведено приклади з практики застосування вищенаведених алгоритмів до раціонального проектування деяких колісних машин та вібраційних агрегатів.

Висновки. Проаналізовано існуючі методи розрахунку та оптимізації складних вібронавантажених конструкцій. Розглянуто новий алгоритм паралельного розрахунку та оптимізації такого роду конструкцій. Планується в подальшому дослідити цей алгоритм під час моделювання динаміки деяких важливих конструкцій, зокрема на обертових машинах, на колісних сільгоспагрегатах.

1. Surana K.S. , 1979, ’’Isoparametric Elements for Cross-Sectional Properties and Stress Analyssi of Beams, International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 14, pp. 475–497. 2. Surana K.S., 1980, “Shape Function for the Isoparametric Transition Elements for Gross-Sectional Propeties and Stress Analysis of Beams, International Journal for Numerical Methods in Engineering”. Vol. 15, pp.1403–1407. 3. Bathe K.J., 1996, Finite Element Procedures, Prentiss-Hall Englewood Cliffs, NJ. Kim, H.S., and Hong, S.M., 1995. “Formulation of transition Elements for the Analysis of Coupled Wall Structures, “Computers and Structures”, Vol. 57. pp. 333–344. 4. Gmur T.S., and Kauten R.H, 1993, “Three Dimension Solid-to-

Beam Transition Elements for Structural Dynamics Analysis", International Journal for Numerical Methods Engineering. Vol. 36, pp. 1429–1444. 5. Gopalakrishnan S., and Doyle J.F., 1995, “”Spectral Super-Elements for Wave Propagation in Structures and Engineering, Vol. 121, pp. 77–90. 6. Gopalakrishnan S., Martin M. and Doyle J.F., 1992, “A Matrix Methodology for Spectral Analysis of Wave Propagation in Multiply Connected Timoshenko Beams" Journal of Sound and Vibration, Vol. 158, Ho.1, pp.11–24. 7. Halliday P.J., Grosh K., 1999, “Dynamic Response of Complex Structural Intersections Using Hybrid Methods", Journal of Applied Mechanics, Vol. 66, pp. 653–659. 8. Богданович А.Е., Ярве Э.В. Оценка пределов применимости инженерных моделей расчета слоистых сред в задачах поперечного изгиба // Механика композитивных материалов. – 1988. – № 6. – С. 1076–1088. 9. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 54 с. – (Методы расчета оболочек. В 5-ти т. – Т.4). 10. Karczmaryk S. An Analytical model of flexural vibration and the bendingnof plane viscoelastic composite structures. Polytechnica Warszawska, Prace Naukowe, Mechanika, z. 172. – Warshawa, 1999. – 159 p. 11. Лурье С.А. Прикладные теории композитных балок // Механика композиционных материалов. Т.2: Конструкции из композитов. – Рига: Зинанта, 1992. – С. 200–209. 12. Пелех Б.Л., Дивеев Б.М., Бутитер И.Б. Оптимизация виброзащитных свойств цилиндрической оболочки из нелинейно-упругого материала. Вопросы оптимального проектирования пластин и оболочек. – Саратов: Изд. Саратовского ун-та, 1981. – С. 71–73. 13. Пелех Б.Л., Сухорольський М.А. Контактные задачи упругих анизотропных оболочек. – К.: Наукова думка, 1980. – 215 с. 14. Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M. A High-Order Theory of Plate Deformation – Part 2: Laminated Plates // Journal of Applied Mechanics – Vol. 44, N4, Trans. ASME, Series E, pp. 669–676. 15. Композиционные материалы. – Т.2: Механика композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – 564 с. 16. Дружинский И.А. Механические цепи. – Л.: Машиностроение, 1977. – 238 с. 17. Hurty W.C. “Dynamic Analysis of Structural System Using Component Modes", AIAA Journal, Vol. 3, No. 4, 1965, pp. 678–685. 18. Гащук П., Вікович І., Дівеєв Б. Застосування дискретно-континуальних дискретних схем для визначення вібронапружень в механічних конструкціях: Труды Одесского политехнического университета. – 1999. – Вып. 2 (8). – С. 34–41. 19. Богомолов С.И., Журавлева А.М. Колебания сложных механических систем. – Харьков, 1979. – 136 с. 20. Зеленцов Б.П. Матричный анализ сложных систем. – Новосибирск: Наука, 1972. – 146 с. 21. Крон Г. Исследование сложных систем по частям. Дизкоптика. – М.: Наука, 1972. – 546 с. 22. Дівеєв Б., Миронюк О. Дискретно-континуальні розрахункові схеми вібронавантажених конструкцій: Збірник наукових праць “Комп'ютерні технології друкарства". – Львів, 1998. – С. 215–220. 23. Гащук П., Вікович І., Дівеєв Б. Розрахунок на міцність кінематично збуреної пружно-підкріпленої навісної штанги обприскувача: Труды Одесского политехнического университета. – 2000. – Вып. 1 (10). – С. 64–68. 24. Гащук П., Дівеєв Б., Вікович І., Бутитер І. Дискретно-континуальне моделювання та оптимізація вібронавантажених рам колісних машин. Математичні методи динаміки неоднорідних середовищ. – Львів–Луцьк, 2000. – С. 235–238.