

УДК 534.111

П.М. ГАЩУК, І.І. НАЗАР

Національний університет “Львівська політехніка”

ПАРАМЕТРИЧНЕ ЗБУРЕННЯ ГНУЧКОГО РОБОЧОГО ЕЛЕМЕНТА МЕХАНІЧНОГО ПРИВОДУ

© Гащук П.М., Назар І.І., 2008

Досліджені параметричні коливання гнучкого робочого елемента приводу. Розглядається випадок, коли сила натягу гнучкого елемента змінюється за певним законом. Використовуючи метод Бубнова-Гальоркіна та деякі перетворення, отримано амплітудні співвідношення, за якими можна досліджувати ширину резонансної області.

The parametrical vibrations of flexible working element of drive are explored. A case is examined, when force of draw of flexible element changes after a certain law. Using the Bubnov-Galerkin method and some transformations, amplitude correlations, after which it is possible to explore the width of resonance area, are got.

Вступ. У техніці вельми часто зустрічаються коливальні одновимірні нелінійно-пружні системи з роззосередженими параметрами, рух яких відбувається вздовж деякої недеформівної осі. Особливу увагу привертають гармонійні коливання в таких системах, проте не лише через простоту їх аналітичного відображення, а насамперед тому, що ця форма руху найприродніша для коливальних процесів і надзвичайно часто зустрічається в реальних системах.

Незважаючи на те, що всі реальні конструкції тою чи іншою мірою є нелінійними, значну частину практичних розрахунків здебільшого виконували на основі суто лінійної [1] теорії. Зазвичай такі розрахунки не призводять до цілком адекватного відображення технічних явищ, оскільки динамічні процеси в реальних системах рідко можуть бути вичерпно пояснені в термінах лінійної теорії. До того ж, під час розглядання змістовно корисних задач переважно вимушено не враховують нелінійно-пружні властивості середовища, ігнорують різного роду сили опору. Все це призводить до зниження цінності отримуваних результатів дослідження і до визнання необхідності проведення розрахунків на основі нелінійної теорії.

Задача про динамічні процеси у приводі з гнучким робочим елементом. Під час експлуатації приводу з гнучким робочим елементом можуть виникати коливання, які порушують нормальне функціонування приводу загалом. Такі коливання зумовлені різними чинниками, зокрема, дією на привід, а подекуди й на сам гнучкий робочий елемент приводу, різної природи сил (періодичних гармонійних і імпульсних чи погано впорядкованих і цілком випадкових). Динамічні процеси у приводі з гнучким робочим елементом вивчені недостатньою мірою, адже аналітичне дослідження впливу кінематичних і фізико-механічних параметрів приводу та періодичних сил на коливні ефекти пов'язано зі значними труднощами – з відсутністю точних математичних методів побудови розв'язків диференціального рівняння, яке править за математичну модель коливань гнучкого елемента приводу. Клопоти, передусім, виникають через те, що коливне середовище загалом само перебуває у напрямленому русі, і в аналітичному описі процесу руху фігурує мішана похідна за координатною та часовою змінними. У такому разі не вдається застосувати для відтворення динамічних процесів, навіть коли йдеться про лінійні аналоги вказаних систем, відомі методи інтегрування рівнянь з частинними похідними (Фур'є чи Д'Аламбера).

Аналіз відомих досліджень і публікацій. У [2–8] розв’язано цілу низку прикладних задач, які пов’язані з дослідженням нелінійних коливань рухомих середовищ, наприклад, конвеєрних ліній, стрічок-носіїв інформації тощо. Проте наявність у цих дослідженнях надмірних штучних обмежень (скажімо, щодо швидкості пересування середовища [2], характеру дії зовнішнього збурення [3], фізико-механічних параметрів та швидкості руху [4]) значною мірою звужує сферу їх застосування.

Метою роботи є розв’язання складнішої прикладної задачі – дослідження динамічних процесів у приводі з гнучким робочим елементом із урахуванням нелінійно-пружних властивостей гнучкого елемента, впливу сил робочого (корисного) опору, дисипативних сил. Далі розглядається випадок змінного в часі натягу гнучкого елемента і довільної швидкості його руху; такі коливання називають параметричними.

Постановка задачі. Математичною моделлю поперечних коливань гнучкого робочого елемента механічного приводу є диференціальне рівняння [9]

$$u_{tt}(x,t) + 2Vu_{xt}(x,t) - \left(\frac{S}{r} - V^2 \right) u_{xx}(x,t) = ef(u, u_x, u_t), \quad (1)$$

де $u(x,t)$ – поперечне переміщення перерізу гнучкого робочого елемента приводу з координатою x в довільну мить часу t ; V – модуль швидкості \mathbf{V} його руху; S – модуль натягу \mathbf{S} у гнучкому елементі приводу; r – погонна маса гнучкого елемента; $ef(u, u_x, u_t)$ – аналітична функція, яка характеризує пружні властивості гнучкого елемента, дисипативні сили і сили іншої природи. До диференціального рівняння (1) долучимо крайові умови

$$u(x,t)|_{x=0} = u(x,t)|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

що відповідають умовам відсутності поперечних переміщень гнучкого елемента приводу у деяких фіксованих точках $x = 0$, $x = l$ (скажімо, в точках дотику гнучкого елемента до шківів).

Значний теоретичний і практичний інтерес становить випадок, коли сила натягу гнучкого елемента приводу змінюється відповідно до закону $S = S_0 + S_1 \cos mt$ (m – натуральне число). Таке зображення натягу охоплює багато практичних задач, де в першому наближенні натяг має саме такий вигляд. З урахуванням вказаного, диференціальне рівняння (1) набуває вигляду

$$u_{tt}(x,t) + 2Vu_{xt} - \left(\frac{S_0}{r} - V^2 \right) u_{xx}(x,t) = \frac{S_1}{r} u_{xx} \cos mt + ef(u, u_x, u_t). \quad (3)$$

Виявляється, що диференціальне рівняння вигляду (3) описує також і поздовжні коливання гнучкого елемента приводу (щоправда, окремі величини набувають іншого змісту).

Отож, ідеться про параметричні коливання гнучкого робочого елемента приводу, який рухається зі сталою за модулем швидкістю й моделюється як середовище зі сталим поперечним перерізом і рівномірно розсосередженою вздовж довжини масою.

Метод аналізу. Для дослідження рівняння (3), яке враховує змінний з часом натяг гнучкого елемента, використаємо метод Бубнова-Гальоркіна [10]. Відповідно до нього розв’язок незбуреного рівняння ($e = 0$) подаватимемо у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^s X_k(x) T_k(t),$$

де $X_k(x)$ – функції, що справджують крайові умови (2): $X_k(0) = X_k(l) = 0$. Легко переконатись, що такими функціями буде система функцій $\{X_k(x)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$. У такому разі, враховуючи повноту і

ортонормованість системи функцій $\{X_k(x)\}$, із (3) після нескладних перетворень, для знаходження невідомих функцій $T_k(t)$, отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\ddot{T}_k + \left(\frac{S_0}{r} - V^2 \right) \left(\frac{kp}{l} \right)^2 T_k = \frac{S_1}{r} \left(\frac{kp}{l} \right)^2 T_k \cos mt + e\bar{f}(T_k, \dot{T}_k),$$

де

$$\bar{f}(T_k, \dot{T}_k) = \frac{1}{p} \int_0^l f(u, u_x, u_t) X_k(x) dx, \quad p = \int_0^l \sin^2 \frac{kp}{l} x dx = \frac{l}{2}.$$

Найцікавішим з теоретичного і практичного поглядів є резонансний випадок, коли виконується рівність

$$\left(\frac{S_0}{r} - V^2 \right) \left(\frac{kp}{l} \right)^2 = n^2 + an^2,$$

де n – натуральне число, $a = \left(\frac{S_0}{r} - V^2 \right) \left(\frac{kp}{nl} \right)^2 - 1$.

Отже, рівняння коливань гнучкого робочого елемента приводу для резонансного випадку набирає вигляду

$$\ddot{T} + n^2 T = -n^2 a T + g T \cos mt + e\bar{f}(T, \dot{T}),$$

де $g = \frac{S_1}{r} \left(\frac{kp}{l} \right)^2$ – коефіцієнт параметричного збурення.

Подальші дослідження виконано для випадку, коли сили внутрішнього тертя і сили зовнішнього опору з достатньою точністю можна апроксимувати залежністю

$$f(u, u_x, u_t) = k_1 u_t + k_2 u_x^3, \quad \text{тоді } e\bar{f}(T, \dot{T}) = b\dot{T} + dT^3,$$

де

$$b = \frac{k_1}{p} \int_0^l \sin^2 \frac{kp}{l} x dx = k_1$$

– коефіцієнт демпфування, пропорційний до швидкості,

$$d = \frac{k_2}{p} \left(\frac{kp}{l} \right)^3 \int_0^l \sin^4 \frac{kp}{l} x dx = \frac{3}{4} k_2 \left(\frac{kp}{l} \right)^3$$

– коефіцієнт кубічної відновлювальної сили.

З урахуванням зазначеного вище рівняння коливань гнучкого робочого елемента приводу матиме вигляд

$$\ddot{T} + n^2 T = n^2 a T + g T \cos mt - b\dot{T} + dT^3. \tag{4}$$

Розв'язок рівняння (4) шукатимемо у вигляді $T = r \cos nt + s \sin nt$, якому відповідає амплітуда коливань $A = \sqrt{r^2 + s^2}$. Тоді праву частину рівняння (4) можна подати як

$$\begin{aligned} \Phi = & n^2 \alpha (r \cos nt + s \sin nt) + \frac{1}{2} \gamma [r \cos(n-m)t + s \sin(n-m)t + r \cos(n+m)t + s \sin(n+m)t] - \\ & - n\beta (s \cos nt - r \sin nt) + \frac{1}{4} \delta [3A^2 (r \cos nt + s \sin nt) - r(r^2 - 3s^2) \cos 3nt + s(3r^2 - s^2) \sin 3nt], \end{aligned}$$

звідки отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \left(n^2 a + \frac{3}{4} dA^2 \right) s + \frac{g}{2} s + nbr = 0, \\ \left(n^2 a + \frac{3}{4} dA^2 \right) r - \frac{g}{2} r - nbs = 0. \end{cases} \quad (5)$$

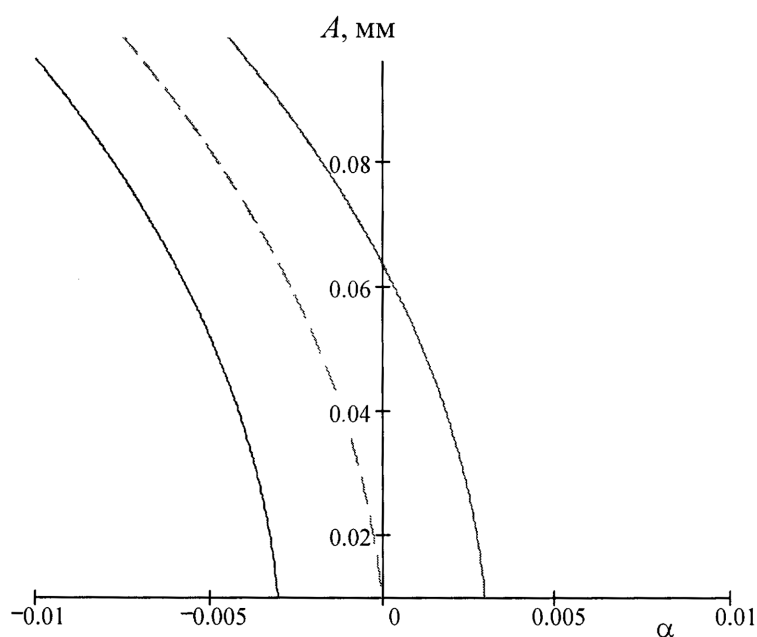
Цікавим є випадок дослідження системи рівнянь (5) в околі нульового розв'язку $r = s = 0$ ($A = 0$). Це передусім пов'язано із вивченням стійкості тривіального розв'язку. Такого штибу ненульові розв'язки існують, коли справджуються умови

$$\frac{3}{4} dA^2 = -n^2 a \pm \sqrt{\frac{1}{4} g^2 - n^2 b^2} \quad (6)$$

чи

$$n^2 a = -\frac{3}{4} dA^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} g^2 - n^2 b^2}.$$

Далі на рисунку подано графік залежності амплітуди коливань гнучкого елемента приводу від параметра a .



Резонансні криві, що відповідають рівності (6)

У разі субгармонійного резонансу $m = 2n$ (перший параметричний резонанс), за якого період $\frac{2p}{m}$ параметричного збурення дорівнює половині періоду $\frac{2p}{n}$ розв'язку, із (6) випливає гранична умова

$$|g| \geq 2nb. \quad (7)$$

Відповідно до (7), найменше значення коефіцієнта параметричного збурення g повинно збігатись з деяким граничним значенням, залежним від демпфування.

Якщо ця умова справджується, то резонансні криві (параболи), відповідні межах умови (7), рівновіддалені (паралельно до осі a) від серединної кривої $n^2 a = -\frac{3}{4} dA^2$, яка виходить з початку координат, і отже, рівновіддалені (в тому самому сенсі, звісно) одна від одної; коли нерівність (7) переходить у рівність ці параболи зливаються. Область, обмежена координатною віссю a і резонансними кривими $a_{\pm} = \pm \frac{1}{n^2} \sqrt{\frac{1}{4} g^2 - n^2 b^2}$, називається резонансною областю, а величина

$$\Delta a = a_+ - a_- = \frac{1}{n^2} \sqrt{g^2 - 4n^2 b^2}$$

– її шириною.

Висновки. На основі викладеної методики можна описати динамічні процеси доволі широкого класу рухомих одновимірних систем. Отримані результати дозволяють оцінити вплив кінематичних, фізико-механічних параметрів, а також нелінійних сил на динаміку процесу у приводах з гнучким робочим елементом. Зокрема вони засвідчують, що стала за величиною швидкість руху гнучкого елемента приводу зменшує частоту його власних коливань. У разі параметричних коливань, зокрема при гармонійному законі зміни натягу гнучкого елемента, збільшення натягу призводить до зменшення резонансної амплітуди. Ширина ж резонансної області залежить від параметрів g і b : із збільшенням коефіцієнта параметричного збурення g ширина резонансної області зростає, а у разі збільшення коефіцієнта демпфування b – зменшується.

1. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 651 с.
2. Боженко М.В., Сліпчук А.М. Вплив повздовжнього руху на нелінійні поперечні коливання пружних одновимірних систем // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2004. №509. – С. 25–30.
3. Назар І.І., Сокіл Б.І. Метод Ван-дер-Поля у дослідженні періодичних збурень рухомих одновимірних систем // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2006. – № 560. – С. 71–75.
4. Вікович І.А., Висоцька Х.А. Нелінійні коливання рухомої струни // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2004. – № 509. – С. 30–35.
5. Вікович І.А., Висоцька Х.А. Повздовжні коливання рухомої стрічки з урахуванням розсіяння енергії в матеріалі // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журн. – Полтава, 2005. – С. 13–17.
6. Вікович І.А. Поперечні коливання обрисувача для хімічного захисту рослин з урахуванням рухомості рідини в ємкості та коливання начіпної итанги на маятниковій одношарнірній підвісі // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журн. – Вінниця: ВДАУ, 2003. – № 6. – С. 52–55.
7. Гладько Ю.Б., Гевко Р.Б. Розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів стрічкового транспортера-очисника // Сільськогосподарські машини: Зб. наук. статей. – Луцьк: ЛДТУ, 1999. – Вип. 5. – С. 46–53.
8. Недосекова Т.С. и др. Расчет надежности механизмов транспортирования ленты кассетных видеоманитофонов // Техника кино и телевидение. – 1996. – № 5. – 32 с.
9. Гащук П.М., Назар І.І. Нелінійні коливання гнучкого робочого елемента приводу під дією імпульсних сил // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2007. – № 588. – С. 20–24.
10. Галеркин Б.Г. Стержни и пластинки /Вестник инженер-техников. – 1915. № 19. – С. 23–32.